NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. BUHL

Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 433-442

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__433_0>

[O'5j]

SUR LES SURFACES DONT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES SE DÉTERMINENT PAR QUADRATURES;

Par M. A. BUHL.

1. Le présent travail est le résumé de conférences faites, en 1908, à la Faculté des Sciences de Montpellier, pour les candidats à l'agrégation des Sciences mathématiques. J'y étudie des surfaces suffisamment générales pour pouvoir rassembler certains résultats épars concernant les lignes asymptotiques des conoïdes, des surfaces de révolution, d'hélicoïdes étudiés notamment par M. Painlevé, et même de surfaces spirales, à rattacher aux précédentes, dont les asymptotiques ne dépendent, comme on sait, que d'une quadrature.

Quoi qu'il en soit j'imagine que ce résumé pourra avoir quelque utilité pour tous les candidats à l'agrégation. Le programme relatif au concours de 1908, qui ne sera probablement pas modifié pour 1909, comprend, en ce qui concerne l'Analyse et ses applications géométriques, les équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre et l'étude des surfaces définies par les intégrales de telles équations. En respectant cet ordre d'idées je considérerai le problème suivant :

Déterminer les surfaces telles que le triangle Omn *formé par l'origine* O *et les intersections avec* Oxy *de l'ordonnée et de la normale en* $M(x, y, z)$ *ait une aire ne dépendant que de l'ordonnée* $z = Mm$ *de* M.

Je me propose de former d'abord l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces et de l'intégrer, ce qui est extrêmement simple, puis d'étudier les lignes asymptotiques des surfaces obtenues, ce qui l'est moins et donnera matière à d'intéressantes remarques. Le point m, projection de M sur Oxy, a évidemment pour coordonnées x et y. Le point n, intersection de la normale en M avec Oxy, a pour coordonnées $x+pz$ et $y+qz$, si bien que l'aire du triangle Omn est

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x+pz & y+qz & 1 \\ x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{z}{2}(py - qx).$$

Cette aire devant être fonction de la seule variable z, je poserai d'autre part

$$(1) \qquad A = -\frac{z}{2}\frac{a}{\Phi'(z)},$$

cette forme de A devant faciliter l'intégration. La constante a est introduite pour qu'on puisse facilement passer du cas général au cas de l'aire A nulle en faisant $a = 0$. Dans ce cas, l'équation aux dérivées partielles est simplement $py - qx = 0$; c'est celle des surfaces de révolution. D'ailleurs ce résultat est évident géométriquement, car l'aire du triangle Omn ne peut être nulle que si Mn rencontre Om et, par suite, Oz; or les surfaces dont la normale rencontre toujours un axe fixe sont de révolution autour de cet axe. Nous voyons déjà que les surfaces de révolution sont des cas très particuliers des surfaces précédemment définies.

Revenant au cas général, on a l'équation aux dérivées partielles

$$py - qx = -\frac{a}{\Phi'(z)},$$

dont les équations des caractéristiques

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = -\frac{dz}{a}\Phi'(z)$$

admettent les intégrales

$$x^2 + y^2 = \text{const.}, \qquad a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = \Phi(z) + \text{const.}$$

On a donc pour intégrale générale

$$\Phi(z) = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + F\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

F désignant une fonction arbitraire. En coordonnées semi-polaires on peut écrire plus simplement

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \\ \Phi(z) &= a\theta + F(r). \end{aligned} \right.$$

On voit tout de suite les surfaces particulières contenues dans celles définies par ces dernières équations. Pour $a = 0$, on retombe sur les surfaces de révolution. Si $F(r)$ disparaît on a les conoïdes ayant Oz pour directrice et Oxy pour plan directeur. Si $\Phi(z)$ se réduit à z on a des hélicoïdes étudiés par M. Painlevé dans le *Recueil d'exercices* de Tisserand (troisième Partie, 2e édition, problème n° 78).

Je vais me proposer, sans rien particulariser, de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques des surfaces (2).

2. En coordonnées curvilignes r et θ, l'équation différentielle des asymptotiques de la surface (2) sera

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta\right)_2 & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta\right)_2 & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta\right)_2 & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = 0.$$

La première colonne de ce déterminant contient des carrés symboliques qu'on développe d'une manière bien connue.

Les dérivations de z sont les seules qui offrent de légères complications. On a

$$\Phi'(z)\frac{\partial z}{\partial r} = F'(r), \qquad \Phi'(z)\frac{\partial z}{\partial \theta} = a,$$

$$\Phi'(z)\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \Phi''(z)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = F''(r),$$

$$\Phi'(z)\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} + \Phi''(z)\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0,$$

$$\Phi'(z)\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \Phi''(z)\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{F''(r)[\Phi'(z)]^2 - \Phi''(z)[F'(r)]^2}{[\Phi'(z)]^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} = -aF'(r)\frac{\Phi''(z)}{[\Phi'(z)]^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = -a^2\frac{\Phi''(z)}{[\Phi'(z)]^3}.$$

On trouve ensuite très facilement que les termes de la première colonne du déterminant précédent sont

$$-2\sin\theta\, dr\, d\theta - r\cos\theta\, d\theta^2,$$

$$2\cos\theta\, dr\, d\theta - r\sin\theta\, d\theta^2,$$

$$\frac{F''\Phi'^2 - \Phi'' F'^2}{\Phi'^3}dr^2 - 2aF'\frac{\Phi''}{\Phi'^3}dr\,d\theta - a^2\frac{\Phi''}{\Phi'^3}d\theta^2.$$

La seconde et la troisième colonne sont respectivement

$$\begin{array}{ll} \cos\theta, & -r\sin\theta, \\ \sin\theta, & r\cos\theta, \\ \dfrac{F'}{\Phi'}, & \dfrac{a}{\Phi'}. \end{array}$$

Développant, on a

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(F'' - F'^2\frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right)dr^2 \\ &\quad - 2a\left(\frac{1}{r} + F'\frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right)dr\,d\theta + \left(rF' - a^2\frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right)d\theta^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

Cette équation ne devant contenir finalement que les variables r et θ, il faut tirer z de la dernière équation (2) et en porter la valeur dans $\frac{\Phi''}{\Phi'^2}$. En général, ce sera impossible tant qu'on n'attribuera pas à $\Phi(z)$ une forme particulière. Commençons par voir à quoi se réduit (3) dans des cas simples où l'on devra être d'accord avec des résultats connus.

3. *Conoïdes.* — Comme on l'a déjà remarqué, les équations (2) définissent un conoïde si la fonction $F(r)$ disparaît. Dans ce cas, (3) devient

$$\frac{2a}{r}\,dr\,d\theta + a^2\frac{\Phi''}{\Phi'^2}\,d\theta^2 = 0.$$

Si l'on supprime le facteur $d\theta$ qui correspond aux génératrices rectilignes et si l'on observe que $a\,d\theta = \Phi'\,dz$, il vient

$$2\frac{dr}{r} + \frac{\Phi''}{\Phi'}\,dz = 0,$$

d'où

$$r^2\,\Phi'(z) = \text{const.}$$

Cette équation détermine les asymptotiques du conoïde $a\theta = \Phi(z)$ en le coupant par des surfaces de révolution d'axe Oz. Elle est beaucoup plus symétrique que la forme habituellement donnée (*voir* encore le *Recueil* de Tisserand, 2e édition, troisième Partie, problème n° 59) et conduit naturellement à un curieux théorème. On peut l'écrire

$$r^2\frac{d\theta}{dz} = \text{const.}$$

et elle exprime alors que, *le point* M *décrivant une asymptotique sur le conoïde, le rayon vecteur* O*m* *balaye des aires dont la variation est proportion-*

nelle à celle de l'ordonnée mM. C'est quelque chose comme le théorème des aires où le temps serait remplacé par une variable purement géométrique.

Ceci devient particulièrement évident dans le cas de l'hélicoïde $z = a\theta$ dont les asymptotiques sont sur des cylindres de révolution d'axe Oz; le rayon Om balaye des secteurs de cercle dont les aires croissent proportionnellement à θ cependant qu'il en est de même de l'ordonnée $m\mathrm{M} = z$.

4. *Surfaces de révolution.* — Si l'on fait $a = 0$ dans la dernière équation (2), on ne diminue pas la généralité en posant d'autre part $\Phi(z) = z$. Alors, d'après (3), les projections des asymptotiques de la surface $z = \mathrm{F}(r)$ sont définies, dans le plan Oxy, par l'équation

$$\mathrm{F}''\, dr^2 + r\mathrm{F}'\, d\theta^2 = 0.$$

Dans beaucoup de cas on peut facilement effectuer la quadrature. Je cite au hasard les surfaces engendrées par une cycloïde tournant autour de sa tangente au sommet, par une chaînette tournant autour de sa base, par un cercle tournant autour d'une tangente, etc. Le tore général conduit à une quadrature elliptique. Le problème inverse, c'est-à-dire celui qui consiste à se donner une famille de courbes $d\theta = \varphi(r)\, dr$ et à déterminer les surfaces de révolution dont les asymptotiques se projettent suivant cette famille, se ramène à deux quadratures. Il faut alors déterminer $z = \mathrm{F}(r)$ par l'équation linéaire

$$\mathrm{F}'' + r[\varphi(r)]^2 \mathrm{F}' = 0,$$

d'où

$$\log \mathrm{F}' = -\int r\varphi^2\, dr, \qquad z = \mathrm{F}(r) = \int e^{-\int r\varphi^2 dr}\, dr.$$

5. *Surfaces de M. Painlevé.* — Correspondant au cas où $\Phi(z) = z$ dans (2), on voit, d'après (1), que *ce sont des hélicoïdes où l'aire du triangle* O*mn est proportionnelle à l'ordonnée m*M. Pour définir les asymptotiques on déduit de (3)

$$F'' \, dr^2 - \frac{2a}{r} \, dr \, d\theta + r F' \, d\theta^2 = 0$$

ou

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 - \frac{2a}{r^2 F'} \left(\frac{d\theta}{dr}\right) + \frac{F''}{r F'} = 0. \tag{4}$$

On achève évidemment par une quadrature. Inversement, on peut se donner une famille de courbes $d\theta = \varphi(r) \, dr$ et chercher les surfaces du type précédent dont les asymptotiques *d'un système* se projettent sur la famille donnée. Le problème se résout par trois quadratures. En effet, $F(r)$ est alors déterminé par l'équation

$$F'' + r[\varphi(r)]^2 F' = \frac{2a}{r} \varphi(r).$$

Prenant F' pour fonction inconnue on a une équation linéaire qui s'intègre en général par deux quadratures; une troisième permettra de passer de F' à F.

Mais observons bien qu'on a déterminé ainsi une surface

$$z = a\theta + F(r) \tag{5}$$

dont un seul système d'asymptotiques se projette suivant les courbes $d\theta = \varphi(r) dr$; l'autre système aura pour équation différentielle

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\varphi(r)} \frac{F''}{r F'} \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{2a}{r^2 F'} - \varphi(r),$$

parce que l'équation (4) doit avoir deux racines dont l'une est $\varphi(r)$ et l'autre un des deux seconds membres qu'on vient d'écrire.

6. M. Painlevé a montré directement que la surface (5) avait des asymptotiques déterminables par quadratures. Cela résulte du fait qu'elle est changée en elle-même par la transformation homographique

$$\theta = \theta_1 + \omega, \qquad z = z_1 + a\omega$$

qui doit conserver les asymptotiques $d\theta = \varphi(r, \theta)\, dr$. Donc φ ne dépend pas de θ.

Plus généralement la surface

$$z = a\theta + F(re^{-k\theta})$$

se change en elle-même par la transformation homographique

$$r = e^{k\omega} r_1, \qquad \theta = \theta_1 + \omega, \qquad z = z_1 + a\omega$$

qui doit conserver les asymptotiques $d\theta = \psi(\rho, \theta)\, d\rho$ si $\rho = re^{-k\theta}$.

Donc ψ ne dépend pas de θ.

J'ai cru devoir rappeler ces remarques que je vais étendre à de nouvelles surfaces.

7. *Surfaces spirales.* — Il reste évidemment encore une manière simple de rendre immédiatement indépendant de z le premier membre de (3). C'est de choisir la fonction Φ de telle manière que $\frac{\Phi''}{\Phi'^2}$ soit constant. On voit facilement qu'on peut prendre, sans diminuer la généralité,

$$\Phi(z) = \log(z + C), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\Phi''}{\Phi'^2} = -1.$$

Donc, *les surfaces* (*du type spirale*)

$$\log(z + C) = a\theta + F(r) \tag{6}$$

sont, d'après (1), *telles que l'aire* A *du triangle* O*mn* *varie proportionnellement à* $z(z + C)$. *En parti-*

culier A *varie proportionnellement au carré de l'ordonnée* $z = m\mathrm{M}$ *si* $\mathrm{C} = 0$.

Pour définir les asymptotiques, (3) donne

$$(\mathrm{F}'' + \mathrm{F}'^2)\,dr^2 - 2a\left(\frac{1}{r} - \mathrm{F}'\right)dr\,d\theta + (r\mathrm{F}' + a^2)\,d\theta^2 = 0,$$

ou

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 - \frac{2a}{r}\,\frac{1 - r\mathrm{F}'}{a^2 + r\mathrm{F}'}\left(\frac{d\theta}{dr}\right) + \frac{\mathrm{F}'' + \mathrm{F}'^2}{a^2 + r\mathrm{F}'} = 0;$$

on est encore ramené aux quadratures.

Le problème inverse consistant à chercher les surfaces (6) dont les asymptotiques d'un système se projettent sur la famille donnée, $d\theta = \varphi(r)\,dr$, conduit à déterminer $\mathrm{F}(r)$ par l'équation

$$\frac{d\mathrm{F}'}{dr} + \mathrm{F}'^2 + (2a + r\varphi)\varphi\mathrm{F}' + a\varphi\left(a\varphi - \frac{2}{r}\right) = 0.$$

C'est, par rapport à F', une équation de Riccati. Si l'on peut l'intégrer, une quadrature supplémentaire donnera F. Alors, en raisonnant comme au n° 5, on voit que le second système d'asymptotiques correspond à l'équation différentielle

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\varphi(r)}\,\frac{\mathrm{F}'' + \mathrm{F}'^2}{a^2 + r\mathrm{F}'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\theta}{dr} = \frac{2a}{r}\,\frac{1 - r\mathrm{F}'}{a^2 + r\mathrm{F}'} - \varphi(r).$$

8. Comme au n° 6, on remarquera que la surface (6) se change en elle-même par une transformation homographique qui est ici

$$\theta = \theta_1 + \omega, \qquad z + \mathrm{C} = e^{a\omega}(z_1 + \mathrm{C}).$$

On conclura de même que les asymptotiques sont déterminables par quadratures. Plus généralement, la surface

$$\log(z + \mathrm{C}) = a\theta + \mathrm{F}(re^{-k\theta}) \tag{7}$$

est changée en elle-même par la transformation homographique

$$r = e^{k\omega} r_1, \qquad \theta = \theta_1 + \omega, \qquad z + C = e^{a\omega}(z_1 + C),$$

ce qui entraîne encore un résultat analogue.

On voit qu'aux hélicoïdes on rattache facilement les surfaces (6) et (7) pour lesquelles les résultats précédents me semblent intéressants; j'en donnerai d'autres dans un second Mémoire que je pense publier dans ce même Recueil et où, au lieu de me servir surtout des variables r et θ, je me servirai de r et z ou de θ et z.