Avis

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 41-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__41_0>

AVIS.

Nous prions les auteurs de solutions de questions proposées de vouloir bien se conformer aux indications suivantes :

1° *Reproduire en tête de chaque solution, conformément à la disposition adoptée dans les* Nouvelles Annales, *l'énoncé de la question proposée, précédé lui-même du renvoi au volume (millésime) et à la page où se trouve cette question;*

2° *N'écrire qu'au recto de chaque feuillet;*

3° *Dans le cas où la solution est accompagnée d'une figure, dessiner cette dernière avec le plus de soin possible et sur une feuille séparée.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2074.

(1907, p. 192.)

On donne un quadrilatère complet; les couples de sommets sont A *et* A′, B *et* B′, C *et* C′, *les sommets* A′, B′, C′ *appartenant à un même côté. Des points* A, B, C *comme centres, on décrit trois circonférences* (A), (B), (C), *qui se coupent deux à deux aux points* A_1 *et* A_2, B_1 *et* B_2, C_1 *et* C_2; *on trace alors la circonférence* (A′) *qui a pour centre le point* A′ *et qui passe aux points* A_1 *et* A_2; *on trace de même les circonférences analogues* (B′) *et* (C′).

1° *Les trois circonférences* (A′), (B′), (C′) *ont deux points communs* D_1 *et* D_2 *de sorte que les trois couples de circonférences forment un système symétrique.*

2° *Si les circonférences* (A) *et* (A′) *sont orthogonales, ainsi que les circonférences* (B) *et* (B′), *il en est de même des circonférences* (C) *et* (C′). *Le système des circonférences dépend alors d'un paramètre, et le lieu des points* A_1 *et* A_2, *par exemple, est une circonférence ayant son centre sur la droite* A′BC *et passant par les points communs aux trois circonférences qui ont pour diamètres les diagonales du quadrilatère complet.* (G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

1° D'après la construction même des cercles, le centre radical I des trois circonférences (A), (B), (C) est d'égale puissance ϖ par rapport aux six circonférences (A), (B), (C), (A'), (B'), (C').

Comme les trois dernières ont leurs centres en ligne droite, elles ont pour axe radical commun la perpendiculaire abaissée de I sur A'B'C'.

2° Soient E, F, G les milieux de AA', BB', CC' et (E), (F), (G) les circonférences décrites sur ces droites comme diamètres. (A) et (A') étant supposées orthogonales se coupent sur (E), (B) et (B') étant aussi orthogonales se coupent sur (F) et, par suite, le point I est sur l'axe radical commun de (E), (F), (G). Ce point I est donc de puissance ϖ par rapport à (C), (C'), (G); ces trois circonférences ont, par conséquent, pour axe radical commun la perpendiculaire abaissée de I sur CC'. On en conclut que (C) et (C') sont orthogonales.

Comme on le voit, le système des circonférences ne dépend, avec les hypothèses faites, que d'un seul paramètre, la position du point I sur l'axe radical de (E), (F), (G).

Soient P le point de rencontre de EFG et de A'BC et (P) la circonférence de centre P et passant par les points communs à (E), (F), (G). Le point I est de puissance ϖ par rapport à (P); (A'), (B), (C), (P) ont donc pour axe radical commun la perpendiculaire abaissée de I sur A'BC et par suite les points A_1 et A_2 sont sur (P) qui est le lieu cherché.

C. Q. F. D.

2076.

(1907, p. 288.)

Si l'on pose

$$J_m = \int \frac{x^m e^{a \operatorname{arc\,tang} x}\, dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$K_m = \int \frac{x^m e^{a \operatorname{arc\,tang} x}\, dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

on peut calculer K_0 *et* K_1. *Le calcul de toutes les autres intégrales,* m *étant un entier quelconque, se ramène à celui de* J_0. (R. Le Vavasseur.)

SOLUTION

Par M. Têtu.

Je vais calculer K_0. Pour cela j'intègre deux fois par parties,

$$(1)\quad K_0 = \int \frac{e^{a \operatorname{arc\,tang} x}\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a}\frac{e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{a}\int \frac{x e^{a \operatorname{arc\,tang} x}\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K_0 = \frac{e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{a\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{a^2}\frac{x e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{e^{a \operatorname{arc\,tang} x}\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'où

$$K_0 = \frac{e^{a \operatorname{arc\,tang} x}(a+x)}{(1+a^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Pour avoir K_1 reportons-nous à l'égalité (1)

$$K_0 = \frac{1}{a}\frac{e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{a}K_1,$$

d'où

$$K_1 = \frac{e^{a \operatorname{arc\,tang} x}(ax-1)}{(1+a^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Je vais maintenant essayer de trouver une formule de récurrence donnant K_m.

Considérons K_{m-1} et intégrons par partie,

$$\begin{aligned} K_{m-1} &= \frac{1}{a}\frac{x^{m-1} e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\quad - \frac{1}{a}\int \frac{e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{(\sqrt{1+x^2})^{\frac{3}{2}}}[(m-1)x^{m-2} - (m-2)x^m]\,dx \\ &= \frac{1}{a}\frac{x^{m-1} e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{m-1}{a}K_{m-2} + \frac{m-2}{a}K_m, \end{aligned}$$

d'où, enfin,

$$(m-2)K_m = aK_{m-1} + (m-1)K_{m-2} - \frac{x^{m-1} e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{\sqrt{1+x^2}},$$

formule qui permettra de calculer K_2, car on connait K_0, K_1, puis K_3, etc.

Arrivons maintenant au calcul de J_m. J_m sera donnée simplement en fonction des K. En effet, on a

$$J_m = \int \frac{x^m e^{a \operatorname{arc\,tang} x} dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{x^m (1+x^2) e^{a \operatorname{arc\,tang} x} dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$J_m = K_m + K_{m+2}.$$

Comme les K sont tous connus, les J le seront également. Donc le problème est résolu.

2079.

(1907, p. 336.)

Si *l'on pose*

$$\pi - y = \sqrt{1-a^2} \int_0^x \frac{dx}{1 + a\cos x},$$

on a aussi

$$\pi = x\sqrt{1-a^2} \int_0^y \frac{dy}{1 + a\cos y}.$$

(G. F.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

Calculons d'abord l'intégrale

$$I = \int_0^x \frac{dx}{1 + a\cos x}.$$

Posons

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2} = t,$$

d où

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Il en résulte

$$I = \int_0^t \frac{2\,dt}{1 + a + (1-a)t^2}.$$

Posons encore

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,t = u.$$

Alors

$$I = 2\int_0^u \frac{du\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}}{(1+a)(1+u^2)} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\,\text{arc tang}\,u.$$

Donc

$$(1)\quad I = \int_0^x \frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\,\text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,\text{tang}\,\frac{x}{2}\right).$$

Or, d'après l'enoncé, on doit poser

$$\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} = \text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,\text{tang}\,\frac{x}{2}\right),$$

ou

$$\cot\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,\text{tang}\,\frac{x}{2}.$$

Il en resulte donc

$$\cot\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,\text{tang}\,\frac{y}{2}.$$

Par consequent,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\,\text{tang}\,\frac{y}{2}\right),$$

$$= \frac{\sqrt{1-a^2}}{2}\int_0^y \frac{dy}{1+a\cos y},$$

ce qui donne bien

$$\pi - x = \sqrt{1-a^2}\int_0^y \frac{dy}{1+a\cos y}.$$

En résume, la question énoncée est une consequence de la relation

$$(2)\quad \text{tang}\,\frac{x}{2}\,\text{tang}\,\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Remarques. — 1° Si l'on pose

$$\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} = \lambda,$$

on voit que si

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{y}{2} = \lambda,$$

il en résulte

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \pi - x &= \lambda \int_0^y \frac{dy}{\sin^2\frac{y}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{y}{2}}, \\ \pi - y &= \lambda \int_0^x \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{x}{2}}. \end{aligned} \right.$$

2° Une application intéressante de la remarque précédente est la suivante :

Soient F et F′ les foyers, et M un point d'une ellipse dont l'excentricité est e. Si x et y désignent les angles MFF′ et MF′F, on a

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{y}{2} = \frac{1-e}{1+e}.$$

On en déduit les formules (4) avec $\lambda = \dfrac{1-e}{1+e}$.

Autres solutions par MM GAEDECKE et PARROD.

2080.

(1907, p. 336.)

On coupe le triangle ABC *par la droite* $\Delta(\lambda\mu\nu)$.

I. *Les points* I, H, K *symétriques des sommets* A, B, C *par rapport aux milieux des segments* $\mu\nu$, $\lambda\nu$, $\lambda\mu$, *sont situés sur une droite* Δ_1.

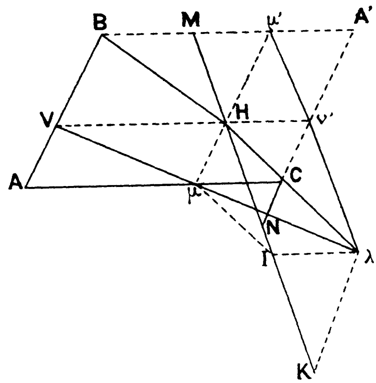
II. *Si* Δ *enveloppe une conique inscrite à* ABC, Δ_1 *tourne autour d'un point fixe.*

III. *Si* Δ *est une droite de Simson,* Δ_1 *est perpendiculaire à* Δ. (P. SONDAT.)

SOLUTION

Par M. PARROD.

I. Construisons le parallélogramme ABA′C et prenons sur BA′ une longueur $B\mu' = A\mu$, la droite $\lambda\mu'$ rencontre CA′ au point ν' tel que $C\nu' = A\nu$. On le démontre simplement à l'aide du théorème de Ménélaüs appliqué aux deux transversales $\lambda\mu\nu$ et $\lambda\mu'\nu'$.



Par la translation $A'\mu' = C\mu$, ν' vient en H et λ en I; par la translation $\mu'H = B\nu$, μ' vient en H et λ en K; donc les trois points I, H et K sont en ligne droite.

II. La droite Δ_1 rencontre $A'B$ en M et $A'C$ en N, on a

$$A'M = 2\,C\mu, \qquad A'N = 2\,B\nu.$$

μ et ν décrivant deux divisions homographiques, il en est de même de M et N; quand Δ est confondu avec BC, les deux points M et N sont tous deux en A; donc Δ_1 passe par un point fixe.

III. Considérons la figure ordinaire de la droite de Simson $\lambda\mu\nu$, relative au point P; la direction de Δ_1 s'obtient en menant CD parallèle, égal à $B\nu$ et de même sens, et en joignant μD. Les deux triangles $P\mu\nu$ et $C\mu D$ sont semblables, donc

$$\widehat{\lambda\mu P} = \widehat{D\mu C};$$

l'angle $P\mu C$ étant droit, $\lambda\mu D$ est aussi droit.