NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1908). Composition de mathématiques élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 409-425

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__409_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1908). COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

SOLUTION PAR UN ANONYME.

I. *Un triangle* ABC *étant donné, on considère trois cercles u, v, w, tangents respectivement aux droites* AB *et* AC, BC *et* BA, CA *et* CB, *et dont les centres sont situés sur les bissectrices des angles intérieurs du triangle; on demande de déterminer ces trois cercles de manière que les angles des cercles v et w, w et u, u et v soient respectivement égaux aux angles* extérieurs *en* A, B, C *du triangle* ABC. (*On entend ici par angle de deux cercles un angle égal à l'angle des rayons qui aboutissent en un point commun.*)

On prendra comme données les angles intérieurs du triangle ABC ($A > B > C$) *et le rayon* R *du cercle circonscrit, comme inconnues les rayons* u, v, w *des cercles cherchés, et l'on posera selon les cas :*

$$x = \pm\sqrt{u}, \qquad y = \pm\sqrt{v}, \qquad z = \pm\sqrt{w}.$$

Soient X *et* X′, Y *et* Y′, Z *et* Z′ *les points de contact des droites* BC, CA, AB *avec les cercles* v *et* w, w *et* u, u *et* v *respectivement ; on distinguera deux cas selon que le nombre des vecteurs* XX′, YY′, ZZ′ *dirigés* en sens contraire *des vecteurs* BC, CA, AB *est impair ou pair.*

Dans chacun des deux cas, les équations du problème étant

$$f(y, z) = 0, \qquad g(z, x) = 0, \qquad h(x, y) = 0,$$

les relations homogènes en x, y, z, *obtenues en combinant ces équations deux à deux, sont décomposables.*

Dans le second cas, qui donne lieu à une solution isolée et à un ensemble continu de solutions, on introduira, pour la solution isolée, le rayon r *du cercle inscrit au triangle* ABC.

II. *Pour la solution du premier cas, on calculera les longueurs* AZ, BX, CY. *On montrera que les axes radicaux des trois cercles* u, v, w, *considérés deux à deux, sont les droites* AD, BE, CF, *en désignant par* D, E, F *les points de contact avec* BC, CA, AB *des cercles exinscrits au triangle* ABC *et situés dans les angles* A, B, C. *On évaluera les distances* X, Y, Z *du centre radical* P *aux droites* BC, CA, AB *en fonction des hauteurs* h', h'', h''' *du triangle* ABC *et du rayon* r *du cercle inscrit ; on évaluera aussi les* *distances* δ', δ'', δ''' *de ce point aux trois hauteurs du triangle en fonction des côtés* a, b, c.

On constatera qu'on peut écrire :

$$u = r' - r, \qquad v = r'' - r, \qquad w = r''' - r,$$

r', r'', r''' *étant les rayons des cercles exinscrits au triangle* ABC, *et l'on en déduira la position des centres* O', O'', O''' *des cercles* u, v, w *sur les bissectrices des angles du triangle; on évaluera la distance du point* O' *au côté* BC *en fonction des éléments* r, r', h', *et la distance du même point à la hauteur issue de* A *en fonction des éléments* b *et* c.

On conclura de ce qui précède que les trois cercles u, v, w *passent au point* P, *et que les tangentes en ce point sont parallèles aux trois côtés du triangle. On fera voir que ces cercles sont les transformés par inversion des droites* BC, CA, AB, *le pôle d'inversion étant le point* P, *la puissance d'inversion étant* $4r^2$.

I.

1. Les deux cercles v et w, par exemple, sont d'un même côté de la droite BC puisqu'ils se coupent, et il en est de même de leurs centres; le cercle v ne peut être dans l'angle opposé à l'angle B du triangle, car alors il en serait de même du cercle C, et ces cercles ne se couperaient pas; par suite BX est dans le sens BC, CX' est dans le sens CB. Si l'on considère un axe x portant le côté BC et orienté dans le sens BC, la relation segmentaire

$$\overline{BX} + \overline{XX'} + \overline{X'C} = \overline{BC}$$

donne la relation entre longueurs

$$BX + CX' \mp XX' = BC,$$

avec le signe — ou le signe + selon que XX′ est dans le sens contraire à BC (*fig.* 1), ou dans le sens BC (*fig.* 2).

A cause de

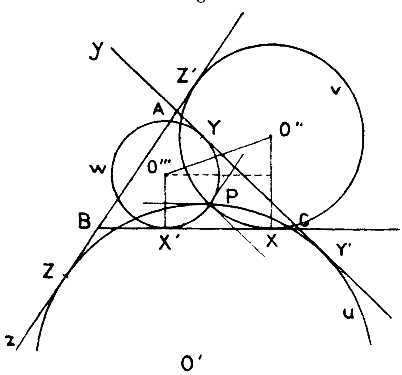
$$\overline{XX'}^2 = v^2 + w^2 + 2vw\cos A - (v-w)^2 = 4vw\cos^2\frac{A}{2},$$

on a donc

$$v\cot\frac{B}{2} + w\cot\frac{C}{2} \mp 2\sqrt{v}\sqrt{w}\cos\frac{A}{2} = 2R\sin A.$$

Considérons d'abord le cas où le nombre des vecteurs XX′, YY′, ZZ′ dirigés en sens contraire

Fig. 1.



de BC, CA, AB est impair. Si cela a lieu pour les trois vecteurs, comme sur la figure 1, nous poserons

$$x = -\sqrt{u}, \qquad y = \sqrt{v}, \qquad z = \sqrt{w},$$

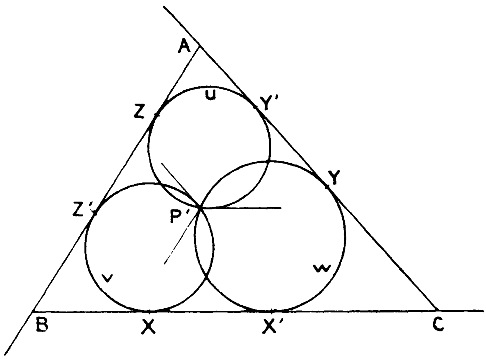
et nous aurons

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} f &= 0, \quad y^2\cot\frac{B}{2} - 2yz\cos\frac{A}{2} + z^2\cot\frac{C}{2} = 2R\sin A,\\ g &= 0, \quad z^2\cot\frac{C}{2} - 2zx\cos\frac{B}{2} + x^2\cot\frac{A}{2} = 2R\sin B,\\ h &= 0, \quad x^2\cot\frac{A}{2} - 2xy\cos\frac{C}{2} + y^2\cot\frac{B}{2} = 2R\sin C; \end{aligned} \right.$$

si XX′ est seul de sens contraire à BC, nous poserons

$$x = \sqrt{u}, \qquad y = \sqrt{v}, \qquad z = \sqrt{w},$$

Fig. 2.



et nous aurons les mêmes équations (en fait, ce cas ne se présentera pas).

2. Formons la combinaison homogène des équations $g = 0$, $h = 0$, en multipliant la première par $\frac{1}{2}\sin C$ ou $\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$, la seconde par $\frac{1}{2}\sin B$ ou $\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$, et en retranchant. La relation $h = 0$, multipliée par $\frac{1}{2}\sin B$, devient d'abord

$$\begin{aligned} y^2 \,\mathrm{co}^2\frac{B}{2} - 2xy\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\ + x^2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cot\frac{A}{2} = R\sin B\sin C \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &\left(y\cos\frac{B}{2} - x\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2 \\ &+ \frac{x^2\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\right) = R\sin B\sin C \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\cos^2 \frac{C}{2}$ par $1 - \sin^2 \frac{C}{2}$,

$$\left(y \cos \frac{B}{2} - x \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right)^2 + \frac{x^2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) = R \sin B \sin C.$$

La relation $g = 0$ prend une forme analogue : il suffit de remplacer y par z, et d'échanger B et C, ce qui ne modifie pas le second terme du premier nombre. On a donc par soustraction

$$\left(y \cos \frac{B}{2} - x \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}\right)^2 - \left(z \cos \frac{C}{2} - x \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}\right)^2 = 0.$$

Cette relation se décompose, et l'on a

$$p = 0, \qquad y \cos \frac{B}{2} + z \cos \frac{C}{2} - x \cos \frac{A}{2} = 0$$

ou

$$p' = 0, \qquad y \cos \frac{B}{2} - z \cos \frac{C}{2} - x \sin \frac{B - C}{2} = 0.$$

On a de même, en combinant les équations $h = 0$, $f = 0$,

$$q = 0, \qquad z \cos \frac{C}{2} + x \cos \frac{A}{2} - y \cos \frac{B}{2} = 0$$

ou

$$q' = 0, \qquad z \cos \frac{C}{2} - x \cos \frac{A}{2} - y \sin \frac{C - A}{2} = 0.$$

3. Avec $p = 0$, $q = 0$, on a $z = 0$, ce qui donne

$$w = 0, \qquad u = b \operatorname{tang} \frac{A}{2}, \qquad v = a \operatorname{tang} \frac{B}{2};$$

le cercle w est un cercle-point C, le cercle u est tangent à AC en C et tangent à AB, le cercle v est tangent à BC en C et tangent à BA. Les hypothèses $p=0$, $q'=0$ et $p'=0$, $q=0$ donnent des solutions analogues. Ces solutions sont sans intérêt.

La solution véritable s'obtient en prenant $p'=0$, $q'=0$; on a, par addition,

$$y\left(\sin\frac{A+C}{2}+\sin\frac{A-C}{2}\right)=x\left(\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{B-C}{2}\right)$$

ou

$$y\sin\frac{A}{2}=x\sin\frac{B}{2};$$

on a donc

$$\frac{x}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{y}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{z}{\sin\frac{C}{2}}=\lambda.$$

Calculons λ par l'équation $f=0$; on a successivement

$$\lambda^2\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\qquad=2R\sin A,$$

$$\lambda^2\left(\sin B+\sin C-4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\qquad=4R\sin A,$$

$$\lambda^2\left(-\sin A+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right)=4R\sin A,$$

$$\lambda^2\left(-\sin A+4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\right)=4R\sin A,$$

$$\lambda^2\sin A=4R\sin A,\qquad \lambda=2\sqrt{R},$$

car x, y, z, étant de même signe, sont tous trois positifs.

Ainsi XX′, YY′, ZZ′ sont respectivement de sens contraires à BC, CA, AB, et l'on a

$$(1')\qquad \frac{u}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{v}{\sin^2\frac{B}{2}}=\frac{w}{\sin^2\frac{C}{2}}=4R;$$

c'est la solution représentée par la figure 1.

I (*suite*).

4. Considérons maintenant le cas où le nombre des vecteurs XX′, YY′, ZZ′ dirigés dans le même sens que BC, CA, AB est impair. Si cela a lieu pour les trois vecteurs, comme sur la figure 2, nous poserons

$$x = \sqrt{u}, \qquad y = \sqrt{v}, \qquad z = \sqrt{w},$$

et nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f &= 0, \qquad y^2 \cot\frac{B}{2} + 2yz\cos\frac{A}{2} + z^2\cot\frac{C}{2} = 2R\sin A,\\ g &= 0, \qquad z^2 \cot\frac{C}{2} + 2zx\cos\frac{B}{2} + x^2\cot\frac{A}{2} = 2R\sin B,\\ h &= 0, \qquad x^2 \cot\frac{A}{2} + 2xy\cos\frac{C}{2} + y^2\cot\frac{B}{2} = 2R\sin C;\end{aligned}\right.$$

si XX′ est seul du même sens que BC, comme cela a lieu dans la figure 3, nous poserons

$$x = -\sqrt{u}, \qquad y = \sqrt{v}, \qquad z = \sqrt{w},$$

et nous aurons les mêmes équations.

5. La combinaison homogène des équations $g = 0$, $h = 0$, est ici

$$\left(y\cos\frac{B}{2} + x\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2 - \left(z\cos\frac{C}{2} + x\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right)^2 = 0.$$

Cette relation se décompose, et l'on a

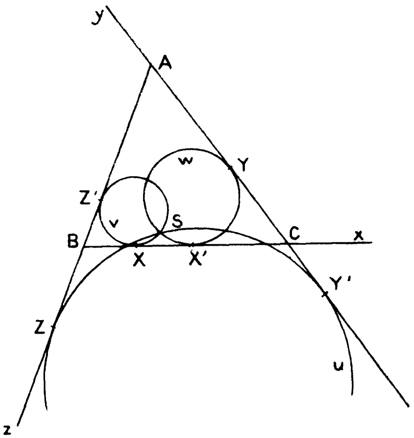
$$p = 0, \qquad x\cos\frac{A}{2} + y\cos\frac{B}{2} + z\cos\frac{C}{2} \qquad = 0$$

ou

$$p' = 0, \qquad y\cos\frac{B}{2} - z\cos\frac{C}{2} + x\sin\frac{B-C}{2} = 0;$$

la première de ces équations est symétrique en x, y,

Fig. 3.



z, A, B, C. On a de même, en combinant les équations $h=0$, $f=0$,

$$p=0, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ou

$$q'=0, \qquad z\cos\frac{C}{2}-x\cos\frac{A}{2}+y\sin\frac{C-A}{2}=0.$$

6. On a donc *une solution isolée* en prenant $p'=0$, $q'=0$; cela donne par addition

$$y\left(\sin\frac{C+A}{2}+\sin\frac{C-A}{2}\right)=x\left(\sin\frac{C+B}{2}+\sin\frac{C-B}{2}\right)$$

ou

$$y\cos\frac{A}{2}=x\cos\frac{B}{2};$$

on a donc

$$\frac{x}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{y}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{z}{\cos\frac{C}{2}}=\lambda.$$

Calculons λ par l'équation $f=0$ du système (2); on a successivement, en remplaçant cos² par 1 — sin²,

$$\lambda^2\left[\left(1-\sin^2\frac{B}{2}\right)\cot\frac{B}{2}+\left(1-\sin^2\frac{C}{2}\right)\cot\frac{C}{2}\right.$$
$$\left.+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right]=2R\sin A.$$

$$\lambda^2\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}-\frac{\sin B+\sin C}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2}\right)=2R\sin A,$$

$$\lambda^2\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$\lambda^2\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

A cause de

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

on peut écrire

$$\lambda^2=\frac{4Rr}{4R+r},\qquad \lambda=2\sqrt{\frac{Rr}{4R+r}},$$

car x, y, z, étant de même signe, sont tous trois positifs.

Ainsi dans cette solution isolée XX′, YY′, ZZ′ sont respectivement de même sens que BC, CA, AB, et l'on a

$$(2') \qquad \frac{u}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{v}{\cos^2\frac{B}{2}}=\frac{w}{\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{4Rr}{4R-r};$$

c'est la solution représentée par la figure 2.

7. Avec $p=0$, les équations (2) se réduisent à deux seulement, $p=0$, $f=0$, ce qui donne des solutions en nombre infini. On peut transformer la relation $f=0$ au moyen de la relation $p=0$; cette dernière donne,

par élévation au carré,

$$y^2 \cos^2 \frac{B}{2} + z^2 \cos^2 \frac{C}{2} + 2yz \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = x^2 \cos^2 \frac{A}{2},$$

et si l'on élimine yz entre la relation $f = 0$ et celle-ci, au moyen des multiplicateurs $\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ et $- \cos \frac{A}{2}$, on obtient la relation symétrique

$$x^2 \cos^2 \frac{A}{2} \cot \frac{A}{2} + \ldots = 4 R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = p,$$

en appelant p le demi-périmètre du triangle. On a donc, pour les solutions qui forment un ensemble continu,

$$(2'') \quad \left\{ \begin{aligned} & x \cos \frac{A}{2} + y \cos \frac{B}{2} + z \cos \frac{C}{2} = 0, \\ & x^2 \cos \frac{A}{2} \cot \frac{A}{2} - \ldots = p, \end{aligned} \right.$$

et l'on pourrait poser $x \cos \frac{A}{2} = \xi$, $y \cos \frac{B}{2} = \eta$, ... La première de ces relations montre que x, y, z ne peuvent être de même signe; on aura par exemple XX' dans le sens BC, YY' dans le sens contraire à CA, ZZ' dans le sens contraire à AB (*fig.* 3).

On peut, sauf la question de réalité, se donner u à volonté. Si l'on élimine $y \cos \frac{B}{2}$ entre la relation ($2''$), on trouve la condition nécessaire et suffisante :

$$u \leqq \frac{4 R r'}{4 R + r}$$

II.

8. On a, pour la solution du premier cas (*fig.* 4),

$$u = 4 R \sin^2 \frac{A}{2}, \qquad v = 4 R \sin^2 \frac{B}{2}, \qquad \ldots$$

ou

$$u = a \operatorname{tang} \frac{A}{2}, \qquad v = b \operatorname{tang} \frac{B}{2}, \qquad \ldots;$$

on a donc

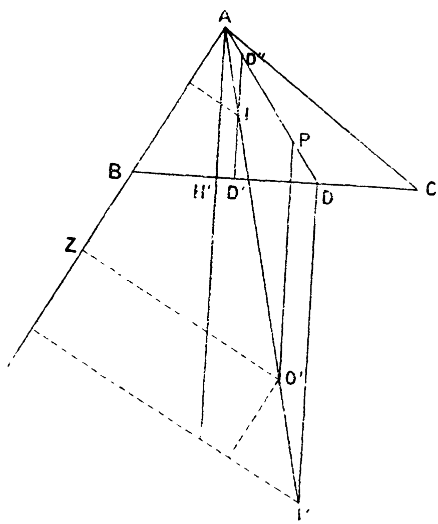
$$AZ = AY' = a, \qquad BX = BZ' = b, \qquad CY = CX' = c.$$

Considérons les cercles v et w. Le point A a même puissance par rapport à ces deux cercles, car on a

$$AZ' = BZ' - BA = b - c, \qquad AY = CA - CY = b - c;$$

le milieu D du segment XX′ a aussi même puissance

Fig. 4.



par rapport à ces deux cercles, et comme on a pour ce point

$$BD - CD = BX - CX' = b - c,$$

D est le point de contact du cercle exinscrit au triangle ABC et situé dans l'angle A; l'axe radical des cercles V et W est donc bien la droite indiquée par l'énoncé.

Les droites AD, BE, CF concourent en un point P, centre radical des cercles u, v, w. A cause de $DB = p - c$, $DC = p - b$, le point P est le barycentre des points A, B, C, affectés des coefficients $p - a$, $p - b$, $p - c$; il est donc le barycentre des points A et D affectés des coefficients $p - a$, et a, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{AP}{a} = \frac{PD}{p-a} = \frac{AD}{p}.$$

Sans nous astreindre, dans ce qui suit, à respecter strictement l'énoncé (ce qui serait d'ailleurs facile), nous remarquons que la distance du point P à la parallèle menée par A a pour valeur $h' \times \frac{a}{p}$ ou $2r$; de sorte que *le point* P *est le centre du cercle inscrit au triangle* A′B′C′ *circonscrit et parallèle au triangle* ABC.

Il résulte d'ailleurs de l'homothétie des cercles I et I′ que le point D″ de la figure appartient au cercle inscrit, de sorte qu'on a aussi $D'D'' = 2r$; on a donc $\overline{PD} = \overline{AD''}$.

9. La projection AZ du segment AO′ sur la droite AB étant égale à a, qui est aussi la projection de II′, on a

$$\overline{AO'} = \overline{II'} \quad \text{ou} \quad \overline{O'I'} = \overline{AI};$$

on a d'ailleurs en même temps $u = r' - r$.

Des égalités $\overline{PD} = \overline{AD''}$ et $\overline{O'I'} = \overline{AI}$, qui déterminent la position des points P et O′, il résulte que la droite O′P est perpendiculaire à BC; les distances des points P et O′ à la droite BC étant d'ailleurs

$$h' - 2r \quad \text{et} \quad r' - (h' - r) \quad \text{ou} \quad r + r' - h',$$

on a

$$O'P = r' - r = u;$$

le cercle u passe donc au point P, et la tangente en ce point est parallèle à BC. Ce résultat montre *comment* les angles des cercles v et w, w et u, u et v sont respectivement égaux aux angles extérieurs en A, B, C du triangle ABC.

Le cercle u est le transformé par inversion de la droite BC, le pôle d'inversion étant P. La puissance d'inversion est

$$\begin{aligned} \mathrm{P} = \mathrm{X} \times 2u &= 2(h' - 2r)(r' - r) \\ &= 2[h'(r' - r) - 2rr' + 2r^2]; \end{aligned}$$

or, la projection des points I et I' sur la hauteur issue de A devient harmoniquement le segment AH', ce qui donne

$$\frac{2}{h'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{r' - r}{rr'}$$

ou

$$2rr' = h'(r' - r);$$

on a donc

$$\mathrm{P} = 4r^2.$$

Le système des cercles u, v, w est transformé par inversion du système des droites BC, CA, AB; le cercle d'inversion est le cercle de centre P et de rayon $2r$ dont il a été question au n° 8.

III.

CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES.

10. Soient D, E, F les points de contact avec BC, CA, AB des cercles α, β, γ exinscrits au triangle ABC et situés dans les angles A, B, C; soit P le point de concours des droites AD, BE, CF. Considérons le cercle homothétique du cercle α, le centre d'homothétie étant A, le rapport d'homothétie étant $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}$: ce cercle passe au point P et la tangente en P est parallèle à BC;

en associant à ce cercle les deux cercles analogues fournis par les cercles β et γ, on obtient la solution du premier cas.

On voit aisément que le système des cercles u, v, w est transformé par inversion du système des droites BC, CA, AB, le pôle d'inversion étant P, la puissance d'inversion étant $4r^2$. Il en résulte que les deux triangles ABC et $O'O''O'''$ sont polaires réciproques par rapport à un cercle de centre P et de rayon $r\sqrt{2}$: les droites PA, PB, PC sont donc perpendiculaires aux droites $O''O'''$, $O'''O'$, $O'O'''$, et sont par suite les axes radicaux des cercles u, v, w considérés deux à deux.

11. Soient D', E', F' les points de contact avec BC, CA, AB du cercle ω inscrit au triangle ABC; soit P' le point de concours des droites AD', BE', CF'. Considérons le cercle homothétique du cercle ω, le centre d'homothétie étant A, le rapport d'homothétie étant $\frac{AP'}{AD'}$: ce cercle passe au point P' et la tangente en P' est parallèle à BC; en associant à ce cercle les deux cercles analogues, on obtient la solution isolée du second cas.

Ici encore le système des cercles u, v, w est transformé par inversion du système des droites BC, CA, AB, le pôle d'inversion étant P'; les axes radicaux de ces cercles considérés deux à deux sont les droites $P'A$, $P'B$, $P'C$.

12. Les cercles de la figure 3, comme ceux des figures 1 et 2, ont un point commun. En effet, *dans toute solution du problème,* si S est un point commun aux trois sphères qui ont pour grands cercles les cercles u, v, w, on a

$$\widehat{O''SO'''} + \widehat{O'''SO'} + \widehat{O'SO''} = (2^d - A) + \ldots + \ldots = 4^d,$$

de sorte que le point S est un point du plan $O'O''O'''$.

Les cercles u, v, w de la figure 3 se déduisent d'ailleurs, par une rotation autour de S, de cercles obtenus en inversant les droites BC, CA, AB, le pôle d'inversion étant S, la puissance d'inversion ayant une valeur convenable.

Si X, Y, Z sont les distances du point S aux côtés du triangle ABC, on a

$$uX = vY = wZ;$$

à cause de

$$\sqrt{u}\cos\frac{A}{2} \pm \sqrt{v}\cos\frac{B}{2} \pm \sqrt{w}\cos\frac{C}{2},$$

on a donc

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sqrt{X}} \pm \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sqrt{Y}} \pm \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sqrt{Z}} = 0.$$

(Le lieu du point S est la quartique tricuspidale qui admet comme points de rebroussement les points A, B, C, et pour laquelle les tangentes de rebroussement concourent au point dont les coordonnées normales sont proportionnelles à $\cos^2\frac{A}{2}$, $\cos^2\frac{B}{2}$, ..., c'est-à-dire aux rayons des cercles u, v, w de la figure 2; ce point de concours est donc le point inverse du point P' de la figure 2. Dans le cas d'un triangle équilatéral, la courbe lieu du point S est une hypocycloïde à trois rebroussements.)

IV.

13. Si x, y, z sont des axes portant les côtés du triangle et orientés de B vers C, de C vers A, de A vers B, et si l'on remplace les cercles u, v, w par des

cycles tangents à ces axes [1], l'examen des figures 1, 2, 3 montre comment les divers cas qu'on a rencontrés se différencient. Avec les figures 1 et 2, on a

$$(v, w) = (y, z), \qquad (w, u) = (z, x), \qquad (u, v) = (x, y);$$

les tangentes au point commun sont de sens contraire à BC, CA, AB dans la figure 1, de même sens que BC, CA, AB dans la figure 2.

Avec la figure 3, on a

$$(v, w) = -(y, z),$$
$$(w, u) = -(z, x),$$
$$(u, v) = -(x, y);$$

l'indétermination se produit donc dans un cas nettement caractérisé.