ALBERT LÉVY

Les constructions géométriques exécutées au moyen de lignes droites et d'un cercle fixe, d'après Jacques Steiner (Berlin, 1833)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 390-409

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__390_0>

[K3 et K12]

LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES EXÉCUTÉES AU MOYEN DE LIGNES DROITES ET D'UN CERCLE FIXE, D'APRÈS JACQUES STEINER (BERLIN, 1833).

PAR M. ALBERT LÉVY,
Professeur au Lycée Voltaire.

Ce travail a pour but de faire connaître en le résumant un Mémoire souvent ignoré de Steiner.

Toutes les constructions géométriques ordinaires peuvent se ramener à une seule : trouver les points d'intersection d'une droite et d'une circonférence.

Mais de ce que les points d'intersection d'une droite et d'une circonférence donnée sont connus on peut tout d'abord déduire facilement la solution des problèmes suivants :

Mener des parallèles.

Étant donnée une longueur, la rendre un certain nombre de fois plus grande, ou la diviser en parties égales.

Mener par un point une droite qui fasse avec une droite donnée un angle donné.

Partager un angle en deux parties égales ou le rendre un certain nombre de fois plus grand.

Mener par un point une droite égale en grandeur et en direction à une droite donnée.

On en déduit ensuite le moyen d'obtenir les points d'intersection d'une droite et d'une circonférence donnée par un rayon mais non tracée.

Ceci dit, l'auteur montre dans un premier Chapitre comment les propriétés du quadrilatère complet permettent, au moyen de la règle seule, d'obtenir le quatrième point d'une division harmonique connaissant les trois premiers, ou le quatrième rayon d'un faisceau harmonique.

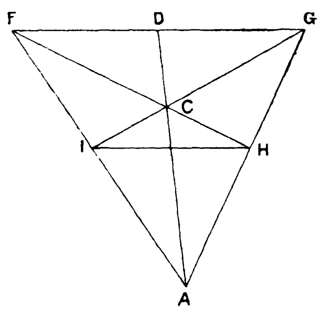
CHAPITRE II.

CONSTRUCTIONS EFFECTUÉES AU MOYEN DE LA RÈGLE, AVEC CERTAINES DONNÉES.

A. On connaît deux parallèles, ou un segment partagé dans un rapport rationnel donné.

I. On connaît trois points en ligne droite G, D, F; D est le milieu de GF, mener par un point donné H la parallèle à GDF. On mène HG, HF; sur GH on prend

Fig. 1.



un point quelconque A; on mène AD, AF; AD coupe HF en C, GC coupe AF en I, IH est la droite cherchée.

II. Étant données deux parallèles GF, IH, trouver le milieu de GF. On joint un point quelconque à deux points G et F pris sur la première droite, les droites AF, AG rencontrent la seconde en IH, on joint FH, GI qui se coupent en C, la droite AC coupe GF au point D demandé.

III. Étant données deux parallèles, mener, par un point donné, une droite parallèle aux deux premières.

Sur la première droite on prend deux points quelconques G et F, on en détermine le milieu, on est ramené au premier problème.

IV. On a deux droites parallèles et sur l'une d'elles une longueur BC.

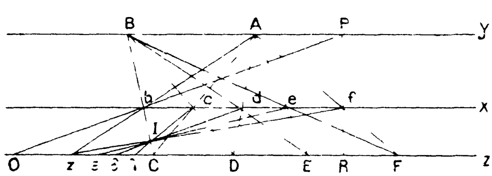
a. Prendre sur la même droite, à partir d'un point donné, *n* fois la longueur BC.

b. Partager BC en un certain nombre de parties égales ou en deux parties proportionnelles à deux nombres donnés.

c. Construire sur la même droite une longueur qui soit à BC dans un rapport rationnel donné.

Par un point quelconque A on mène une parallèle

Fig. 2.



aux deux droites données. On joint AB, AC qui coupent la deuxième droite en b, c.

On joint Cb qui coupe Ay en G. Gc coupe Bx en D,

$$CD = DC.$$

AD coupe ba en d, on joint bd qui coupe Bx en E,

$$DE = CD,$$

et ainsi de suite.

On a

$$BF = 4\,BC.$$

a. Soit à porter une longueur $= 4$BC; à partir de O on joint Ob qui coupe Ay en P, on joint Pf qui coupe Bx en R. OR est le segment cherché.

b. Soit à partager BC en n parties égales; soit, par exemple, $bf = n\,bc$; on joint Cb, Bf qui se coupent en I; on joint Ic, Id, Ie qui coupent OF en γ, δ, ε. Pour partager dans un rapport $p : q$, on prend $bk = (p + q)\,bc$, $be = p.\,bc$; on joint Bk, Cb qui se coupent en I, on joint Ie qui coupe Bx en ε. ε est le point cherché.

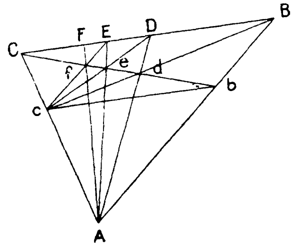
c. Soit à trouver une droite qui soit à BC dans le rapport $\frac{q}{p}$ et supposons le rapport $\frac{ke}{eb} = \frac{q}{p}$.

On joindra Bb, Ce et par le point où se coupent les deux droites on mènera la ligne qui passe par k et qui rencontrera BC en N, CN sera la droite cherchée, car on aura $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CN}} = \frac{p}{q}$.

Remarque. — Si l'on doit seulement trouver une longueur qui est à BC comme 1 à n (n entier), on peut procéder ainsi :

On joint un point A à BC; AB, AC coupent la parallèle en b, c. Bc, Cb se coupent en d; Ad coupe BC en D

Fig. 3.



qui est le milieu de BC. cD coupe Cb en e, Ae coupe BC en E, CE $= \frac{1}{3}$ BC, car dans le quadrilatère complet A*ced* (dont les diagonales sont A*e*, *cd* et CD) les quatre points B, E, D, C forment une division harmonique $\frac{CE}{ED} = \frac{BC}{BD} = 2$.

$$CE = ED, \qquad CE = \frac{1}{3} BC.$$

De même *a*E coupe C*b* en *f*, A*f* coupe BC en F, $CF = \frac{1}{4} BC$, et ainsi de suite.

Ce procédé ingénieux, dit Steiner, paraît avoir été indiqué pour la première fois par un capitaine d'artillerie, un Français, Brianchon (*Application de la théorie des transversales*, Paris, 1818).

On a sur une droite deux longueurs BD, DC dont le rapport rationnel est connu, on demande de mener au moyen de la règle seule une parallèle à la droite donnée par un point donné.

Ce problème ayant plus d'intérêt théorique que d'utilité pratique, Steiner indique une solution sommaire, abandonnant à d'autres le soin d'en trouver une plus facile et plus commode.

Le rapport rationnel des deux longueurs BD, CD peut toujours être exprimé par le rapport de deux nombres entiers a et b premiers entre eux; soit $a > b$. On construira le point E, conjugué harmonique de D par rapport à B et C, et l'on aura $\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE}$; si $CE = x$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b+x}{x}, \qquad x = \frac{b(a+b)}{a-b};$$

soit $BC = a + b = y$,

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a-b};$$

on peut donc déduire des deux longueurs BD, CD deux longueurs BC, CE dont le rapport est celui de la différence au plus petit des deux nombres C. C'est pourquoi en répétant le procédé on arrivera à deux longueurs égales, car si $a - b > b$, par une nouvelle construction on aura deux longueurs dont le rapport est $\frac{b}{a - 2b}$, on continuera jusqu'à ce qu'on obtienne $\frac{b}{a - nb}$ où $a - n < b$ soit c. On trouvera ensuite deux longueurs dont le rapport est $\frac{c}{b - c}$, et ainsi de suite; comme a, b, c sont des nombres entiers qui vont en diminuant, on arrivera à deux longueurs dont le rapport est $\frac{1}{1}$.

Si par exemple $a = 2$, $b = 1$, on aura $x = 3$. C sera le milieu des deux points B et E.

B. On donne deux couples de droites parallèles, ou deux longueurs partagées en des rapports rationnels, avec un couple de parallèles et une droite partagée en un rapport rationnel.

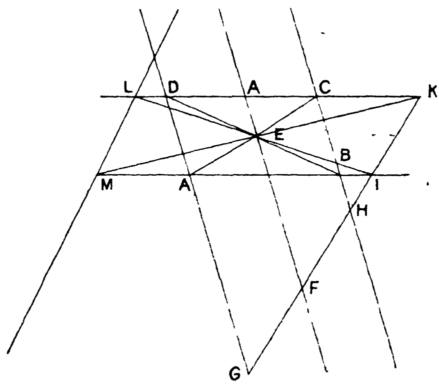
I. On a deux couples de parallèles, c'est-à-dire un parallélogramme, on demande, au moyen de la règle seule :

a. De tracer par un point donné une parallèle à une droite quelconque donnée;

b. De partager une longueur quelconque dans un rapport donné.

Soit ABCD le parallélogramme donné, dont les diagonales se coupent en E; par le point E on mène la parallèle aux droites AD et BC. Soit GHK une droite donnée, qui coupe les trois parallèles en G, F, H. F sera le milieu de GH et l'on saura mener par un point quelconque la parallèle à GH. On pourra aussi joindre IE, KE, la droite LM étant parallèle à IK, on saura mener

Fig. 4.



par un point quelconque une parallèle à ces deux droites.

c. La deuxième question se résout au moyen de la première.

II. On connaît :

a. Trois parallèles qui coupent une droite donnée dans un rapport rationnel donné ;

Ou *b*. Sur deux parallèles deux longueurs qui sont dans un rapport donné ;

Ou *c*. Deux parallèles quelconques et une longueur partagée dans un rapport donné ;

Ou *d*. Deux longueurs quelconques situées sur deux droites qui se coupent et partagées dans des rapports donnés.

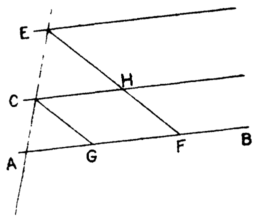
On demande :

α. De mener par un point quelconque une parallèle à une direction donnée ;

β. De partager une longueur quelconque dans un rapport donné.

Les trois parallèles coupent la droite en A, C, E, de telle sorte que $\frac{AC}{CE} = \frac{p}{q}$ $\left(\frac{p}{q}\text{ étant irréductible}\right)$. On prend $AG = p$ fois une longueur quelconque mesurée sur AB

Fig. 5.



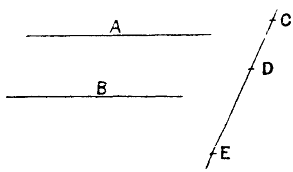
et $CB = q$ fois cette longueur, les droites CG et BE sont parallèles; on est ramené au cas précédent.

Soient AB, CD les parallèles données, AB et CH les longueurs dont on connaît le rapport $\frac{p}{q}$; AC et CH se coupent en E (figure précédente) et l'on a

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CH} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{AC}{CE} = \frac{p-q}{q},$$

on est ramené au cas précédent.

Fig. 6.



Soient A et B les deux parallèles données et soit

$$\frac{CD}{DE} = \frac{p}{q};$$

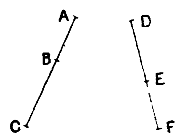
on peut mener par les trois points C, D, E des parallèles aux droites A et B, on est ramené au cas *a*.

Soient

$$\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{DE}{EF} = \frac{r}{s};$$

par les points D, E et F de la seconde menons des paral-

Fig. 7.



lèles à la première, nous sommes ramenés au cas *a*.

C. On donne un carré.

Si le parallélogramme devient un carré on pourra, en plus des problèmes précédents, résoudre les problèmes suivants :

a. Mener par un point donné une perpendiculaire à une droite donnée.

b. Partager un angle droit en deux parties égales.

c. Multiplier un angle donné par un angle donné *n*.

Soit ABCD le carré donné; si par le centre de ce carre on mène une droite quelconque GF, il est facile d'avoir la droite IK qui lui est perpendiculaire en son milieu E; par F on mène FH parallèle à BC et par H la parallele HI à la diagonale AC. IEK est perpendiculaire a GF, car

$$FC = HB = BI \qquad \text{et} \qquad BF = CE,$$

$$\widehat{EBI} = \widehat{ECF};$$

les deux triangles ECF, EBI sont égaux, donc

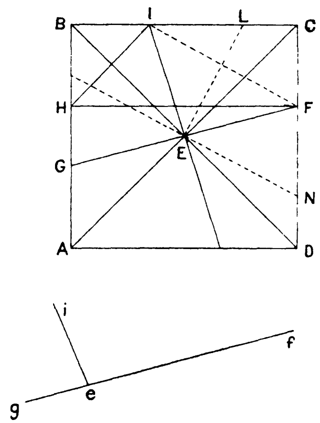
$$\widehat{BEI} = \widehat{ECF}$$

et, par suite,

$$\widehat{IEF} = 1 \text{ droit.}$$

De plus IE = EF, le triangle IEF est isoscèle, la bissectrice EL de l'angle droit IEF est perpendiculaire

Fig 8.



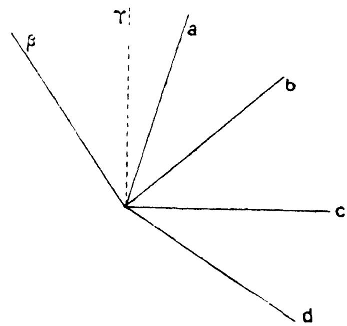
sur IF, on aura donc cette bissectrice en menant EN parallèle à IF et EL perpendiculaire à EN.

Si l'on demande de mener par un point i une perpendiculaire à une droite gf, on mènera par E la parallèle GF à gf, on tracera la perpendiculaire IK à GF et par i on mènera la parallèle ie à IK.

Pour partager en deux parties égales un angle droit ief, on mène GI, IK parallèles à ie, gf; on trace EL comme il a été dit et par e on lui mène la parallèle el.

Le cas (c) se déduit du cas (a), car soit un angle dont les côtés sont a, b. Élevons à b la perpendiculaire par le sommet de l'angle donné, soit β; prenons le rayon conjugué harmonique de a par rapport à C et β, soit c; angle $(ab) =$ angle (bc), (ac) est le double de (ab). Élevons à c la perpendiculaire et doublons

Fig. 9.



l'angle (bc) en (bd), $(ad) = 3(ab)$ et ainsi de suite (*fig.* 9).

CHAPITRE III.

SOLUTION DE TOUS LES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE AU MOYEN DE LA RÈGLE, ÉTANT DONNÉE UNE CIRCONFÉRENCE.

Soit O le centre de la circonférence donnée supposée tracée, nous considérerons comme connus les points d'intersection d'une droite tracée et de ce cercle.

Problème I. — *Mener par un point donné une parallèle à une droite donnée.*

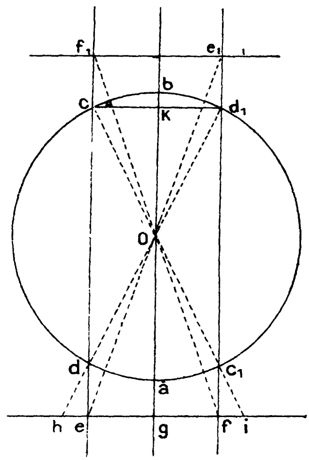
a. La droite donnée passe par le centre du cercle; on connaît sur cette droite trois points a, O, b; O est le milieu de ab, on est ramené à un problème traité.

b. La droite cd coupe le cercle, mais elle ne passe pas par le centre, soit cd (*fig.* 10).

cO coupe le cercle en c_1, dO le coupe en d_1, la droite $c_1 d_1$ est parallèle à cd. On a deux parallèles cd, $c_1 d_1$, on sait leur mener une parallèle par un point donné.

c. La droite donnée a une position quelconque, soit ef; soit abg un diamètre qui coupe la droite en g;

Fig. 10.



par un point quelconque c du cercle on mène la parallèle à ab ; on mène les diamètres cc_1, dd_1, les droites cd et $c_1 d_1$ coupent la droite donnée en e et f; g est le milieu de ef, on est ramené à un problème antérieur.

Autre solution. — On mène par deux points quelconques de la droite h et i les diamètres hcc_1, idd_1 ; on joint cd, $c_1 d_1$ qui coupent la droite en e et f; on mène eO qui coupe $c_1 d_1$ en e_1, fO qui coupe cd en f_1 ; $e_1 f_1$ est parallèle à ef, on sait leur mener une parallèle par un point donné.

Remarque. — Si l'on devait mener des parallèles à plusieurs droites données, il serait bon de tracer un diamètre ab et deux cordes qui lui sont parallèles cd, $c_1 d_1$, car ces trois droites coupent chacune des droites données en trois points dont l'un est au milieu des deux autres.

Problème II. — *Étant donnée sur une droite une certaine longueur, la rendre n fois plus grande ou la diviser en parties égales, ou construire une longueur qui soit à la longueur donnée dans un rapport donné.*

On mène par un point une parallèle à la droite qui porte la longueur donnée, on est ramené à un problème précédent.

Problème III. — *Mener par un point donné une perpendiculaire sur une droite donnée.*

A. *Au moyen de parallèles.* — *a.* La droite donnée est un diamètre du cercle donné, soit ab (*fig.* 10); on mène la corde cd parallèle à ab, le diamètre dd_1; cd_1 est perpendiculaire à ab; ab coupe cd_1 en son milieu K. On sait mener par un point une parallèle à cd_1 dont on connaît le milieu. Le problème est résolu.

En particulier, pour trouver le diamètre perpendiculaire à ab, qu'on suppose menées les droites ac, bd et qu'on joigne leur point d'intersection au centre O.

b. La droite donnée est une corde de cercle, soit cd. On mène les diamètres cc_1, dd_1; les droites cd_1, $c_1 d$ sont perpendiculaires à cd et, par suite, parallèles entre elles; on sera ramené à mener par un point une parallèle à ces deux droites.

c. La droite ne coupe pas le cercle, soit ef.

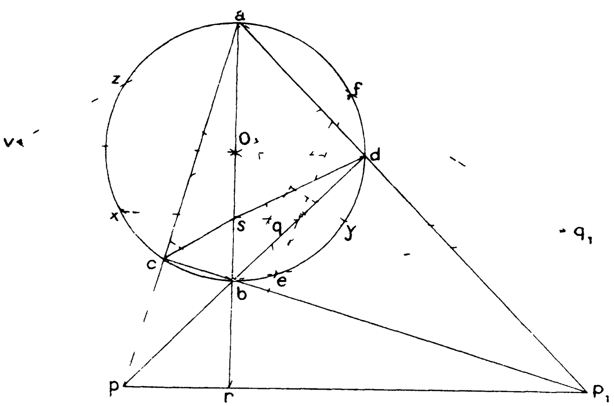
On mène une corde parallèle à ef, cd_1, puis les diamètres cc_1, d_1d et les cordes cd, c_1d_1 ; elles sont perpendiculaires à ef et sont parallèles entre elles, on est ramené à un problème connu.

B *Au moyen de propriétés harmoniques.* — *a.* La droite donnée est un diamètre du cercle donné aOb.

Le point donné P n'est pas sur ab, on joint pa, pb qui coupent la circonférence en c et d; ad, bc se coupent en p_1, pp_1 est la droite demandée.

En effet, dans le triangle app_1, p_1c, pd sont deux hauteurs, ab est la troisième hauteur, ou pour s'ap-

Fig 11.



puyer sur des propriétés harmoniques, on mène la corde cd qui coupe ab en s. On voit que pp_1 est la polaire de s.

Si le point donné était en r, on mènerait une droite quelconque ref, ae, bf se coupent en q; af, be se coupent en q_1, qq_1 coupe ab en s; par s menons une corde quelconque cd, ac, bd se coupent en p, pr est la droite cherchée.

b. La droite a une position quelconque, soit pp_1 ou

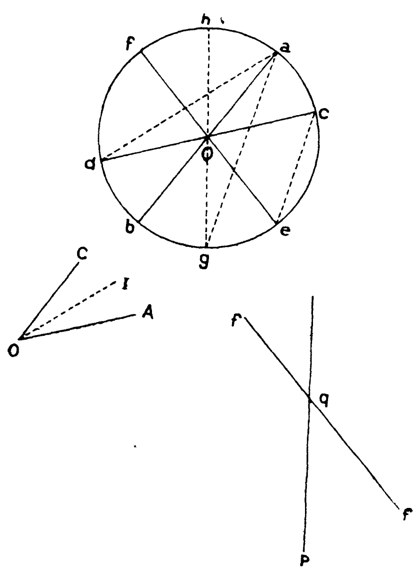
qq_1 ; on cherche le pôle s ou r de la droite, on mène le diamètre Os ou Or qui est perpendiculaire à la droite donnée. On cherche la polaire de r, soit xy ; on trace le diamètre yOz ; az, bx se coupent en v ; le diamètre vO est parallèle à pp_1 ; on n'a plus qu'à mener une perpendiculaire à ce diamètre par le point donné. Pour la droite qq_1 la solution est un peu plus simple.

Problème IV. — *Par un point donné mener une droite faisant avec une droite donnée un angle donné.*

Soient $\widehat{AOC}$ l'angle donné, EF la droite donnée et p le point donné (*fig.* 12).

On mène les diamètres ab, cd parallèles aux côtés de

Fig. 12.



l'angle donné, de sorte que $\widehat{aOc} = \widehat{AOC}$; ensuite le diamètre ef parallèle à la droite donnée EF, on mène la corde ce, puis ag parallèle à ce; l'arc $ge =$ arc ac, donc $\widehat{eOg}$ est égal à l'angle donné; il reste à mener par p la parallèle à gh, pq qui est la droite cherchée.

En joignant ae à la place de ce et menant la parallèle par c, etc., on aurait la droite passant par p et faisant avec EF l'angle donné, mais dans l'autre sens.

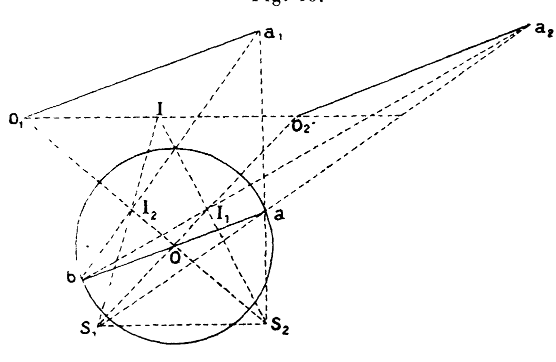
Problème V. — *Partager un angle en deux parties égales.*

Soit $\widehat{AOC}$ l'angle donné. Menons les diamètres ab, cd parallèles aux côtés de l'angle et joignons ad; l'angle $\widehat{dab}$ est égal à la moitié de l'angle $\widehat{bOd}$, c'est-à-dire la moitié de l'angle donné. La parallèle OI à ad est bissectrice de l'angle $\widehat{AOc}$.

Problème VI. — *Mener par un point donné un segment égal en grandeur et en direction à un segment donné.*

Soient (*fig.* 13) $O_1 a_1$ le segment, O_2 le point donné.

Fig. 13.



Tous les segments d'origine O_2 et de longueur $O_1 a_1$

ont leurs extrémités sur un cercle de rayon $O_1 a_1$ et de centre O_2.

Nous considérons donc les trois cercles suivants : le cercle O et les cercles de centres O_1, O_2 et de rayon $O_1 a_1$; nous déterminerons leurs centres de similitude qui nous permettront de résoudre le problème.

Soient S et I les centres de similitude externe et interne de $O_1 O_2$.

Soient S_1 et I_1 les centres de similitude externe et interne de OO_2.

Soient S_2 et I_2 les centres de similitude externe et interne de OO_1.

I est au milieu de $O_1 O_2$, S est à l'infini, par suite $S_1 S_2$ et $I_1 I_2$ sont parallèles à $O_1 O_2$. D'où la solution :

On mène OO_1, OO_2, $O_1 O_2$ et le diamètre ab parallèle à Oa_1.

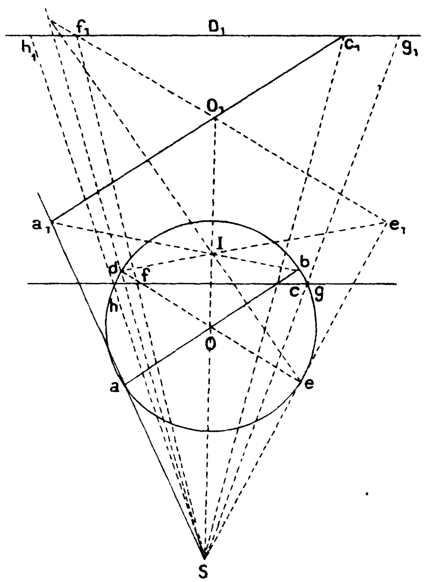
On joint $a_1 a$, $a_1 b$ qui coupent OO_1 en S_2 et I_2; par S_2 on mène la parallèle à $O_1 O_2$, elle coupe OO_2 en S_1. $S_1 I_2$ coupe $O_1 O_2$ en I, IS_2 coupe OO_2 en I.

Ceci posé, soit ab un diamètre quelconque de O. $S_1 a$ et $I_1 b$ se coupent en a_2 qui appartient au cercle O_2, et en particulier si ab est parallèle à $O_1 a_1$ il en sera de même de $O_2 a_2$. Le problème est résolu.

Problème VII. — *Trouver les points d'intersection d'une droite donnée et d'un cercle donné en grandeur et en position* (*mais qui n'est pas tracé*).

Soient D_1 la droite donnée, O_1 et le centre $O_1 a_1$ le rayon du cercle donné. Déterminons les centres de similitude des deux cercles, en menant ab parallèle à $O_1 a_1$, joignant $a_1 b$ et $a_1 a$, soient S et I. Si l'on considère le point S comme centre d'homothétie, l'homologue de D_1, D, coupera le cercle O en deux points qui seront les homothétiques des points cherchés. Soit c_1 le point où $O_1 a_1$ coupe D_1, la droite Sc_1 coupe ab en c homo-

Fig. 14.



logue de c_1. Menons un diamètre quelconque de ; Sd, $1c$ se coupent en d_1 ; Se, $1d$ se coupent en e_1 ; $d_1 e_1$ est l'homothétique de de, elle coupe D_1 en f_1, Sf_1 coupe de en f, cf est l'homothétique de D_1, cette droite cf coupe le cercle O en g, h ; Sg, Sh coupent D_1 en g_1 et h_1 qui sont les points cherchés.

Si D ne coupe pas le cercle O, D_1 ne coupe pas O_1 et si D est tangent à O, D_1 est tangent à O_1.

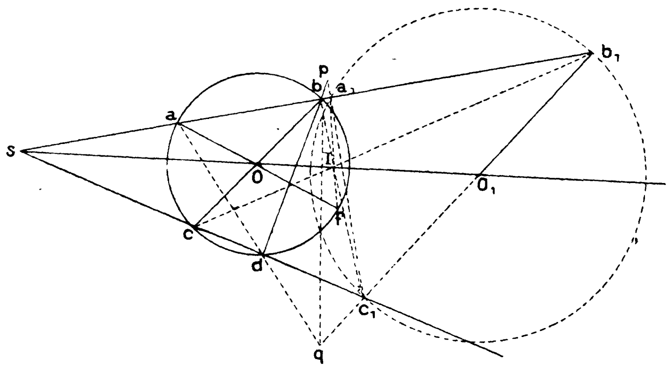
Si $O_1 a_1$ était parallèle à D_1, le point c_1 serait à l'infini ; on construirait un second point tel que f (et cela aussi si le point c_1 est trop éloigné).

Problème VIII. — *Trouver les points d'intersection de deux cercles donnés.*

Premier cas. — L'un des cercles est tracé : c'est le cercle O lui-même; l'autre est donné par son centre O_1 et son rayon $O_1 b_1$.

On mène dans le cercle donné le diamètre bc parallèle à $O_1 b_1$; on joint $b_1 b$, $b_1 c$ qui coupent OO_1 aux

Fig. 15.



centres de similitude S et I des deux cercles; soit a le deuxième point d'intersection de Sb et O; on mène le diamètre af, fI coupe Sb_1 en a_1, Sc coupe le diamètre $O_1 b_1$ en c_1 et le cercle O en d; ba_1 et $c_1 d$ sont deux couples de points antihomologues. $a_1 c_1$ et bd sont deux cordes antihomologues, elles se coupent en p sur l'axe radical; de même ab_1, $c_1 d$ sont deux couples de points antihomologues, ad et $b_1 c_1$ se coupent en q qui appartient à l'axe radical, la droite pq coupe le cercle O aux deux points cherchés; si pq ne coupe pas O, O et O_1 ne se coupent point; si pq est tangent à O, O et O_1 sont tangents.

Deuxième cas. — Les deux cercles sont donnés par les rayons $O_1 a_1$, $O_2 c_2$.

On cherche l'axe radical de O et de O_1, celui de O et de O_2; ils se coupent en I. De I on mène la perpendiculaire à $O_1 O_2$ qui est l'axe radical de ces deux cercles, il n'y a plus qu'à déterminer les points d'intersection de cette droite avec O_1 par exemple.

Steiner indique aussi une autre solution de ce problème qui consiste à construire directement l'axe radical de O_1 et O_2 : pour cela il détermine d'abord les centres de similitude $S_1 I_1$, $S_2 I_2$ et ensuite les couples de points antihomologues de O_1 et de O_2.

A l'époque où Steiner écrivait son petit Livre, l'homothétie n'était guère enseignée, aussi lui consacre-t-il un Chapitre de son Ouvrage. Dans ce Chapitre il traite comme exercice du cercle des neuf points, et c'est lui, je crois, qui en parle pour la première fois.