G. FONTENÉ

Sur l’expression de certains volumes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 385-389

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__385_0>

[K14d]

SUR L'EXPRESSION DE CERTAINS VOLUMES;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

De divers théorèmes connus on peut dégager l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Si dans un solide, toute section parallèle à un plan donné* P *a son aire exprimée par une fonction du second degré de la cote du plan sécant,*

$$S = az^2 + bz + c,$$

le volume d'un segment quelconque compris entre deux plans parallèles au plan P *admet les diverses expressions suivantes :*

$$V = \frac{h}{6}(B + B' + 4B''), \tag{1}$$

$$V = \frac{h}{4}(B + 3S), \tag{2}$$

$$V = B''h + \frac{ah^3}{12}. \tag{3}$$

B et B′ sont les aires des deux bases, B″ est l'aire de la section faite par un plan parallèle aux bases et équidistant des bases, S est l'aire de la section faite par un plan parallèle aux bases aux deux tiers de la hauteur à partir de la base B. Les formules précédentes se déduisent de celle-ci :

$$V = \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch,$$

les cotes étant comptées depuis le plan de la base B.

1° *a*. La formule (1) a été donnée par Mascheroni pour le volume du *prismatoïde*, et on l'établit alors directement sans faire intervenir l'expression de l'aire des sections parallèles aux bases; il est d'ailleurs facile de vérifier que cette aire est donnée par une fonction du second degré de la cote du plan sécant. *La même formule s'applique en remplaçant les polygones* B *et* B' *par deux aires planes quelconques situées dans des plans parallèles, et en prenant pour surface latérale une surface réglée quelconque.*

Voici un exemple qui n'a peut-être pas été remarqué. Considérons dans l'espace n droites fixes α, β, γ, ... et un plan P; un plan sécant parallèle au plan P rencontre les droites fixes en des points A, B, C, ..., ce qui détermine un polygone ABC...; si le plan se déplace, ce polygone engendre un volume qui est de la nature des volumes ci-dessus; la surface engendrée par le côté AB, par exemple, est en effet un paraboloïde hyperbolique, et il suffit de considérer les génératrices du second système pour que la portion de surface latérale correspondante se trouve définie de la manière indiquée plus haut. On peut d'ailleurs vérifier, dans le cas de trois droites, que l'aire S a une expression de la forme indiquée; si le trinome en z a des racines, il existe deux droites Δ', Δ'' parallèles au plan P et qui rencontrent les trois droites α, β, γ; dans le cas particulier où ces trois droites sont parallèles à un même plan, l'une des droites Δ', Δ'' est rejetée à l'infini, et l'on a par suite $a = 0$; on a donc alors simplement

$$V = B''h.$$

b. La formule (1) a été donnée par Sarrus pour le cas général indiqué dans l'énoncé.

Il est facile de l'établir directement pour le cas du *segment sphérique*. La formule ordinaire relative à ce volume est

$$V = \frac{\pi(a^2 + b^2)h}{2} + \frac{\pi h^3}{6}.$$

Or, si l'on désigne par c le rayon de la section faite dans la sphère par un plan parallèle aux bases et équidistant des bases, on a

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{h^2}{4};$$

on a donc

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2) \\ &= \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + 4c^2 - 2a^2 - 2b^2) \\ &= \frac{h}{6}(\pi a^2 + \pi b^2 + 4\pi c^2). \end{aligned}$$

(On peut encore établir directement la formule par l'*anneau sphérique*, et en conclure qu'elle s'applique au segment sphérique.)

On passe aisément de la sphère à l'ellipsoïde de révolution, de là à l'ellipsoïde à axes inégaux, de là enfin au cas où les bases du segment ne sont pas perpendiculaires à un axe principal, deux solides compris entre deux plans parallèles ayant même volume si tout plan parallèle à ceux-là et compris entre eux détermine dans les deux solides des sections de même aire (axiome de Cavalieri).

2° La formule (2) se trouve, pour le cas du prismatoïde, dans l'Ouvrage récent de M. Halsted : *Rational Geometry*. M. Ch. Michel a remarqué, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires*, que cette formule est le cas le plus simple d'une formule générale

$$V = \frac{h}{1+\lambda}(X+\lambda Y),$$

X et Y étant les aires de deux sections faites par des plans parallèles aux bases, de part et d'autre de la section moyenne, à des distances du plan de cette section données par les formules

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{1} = \frac{h}{\sqrt{12\lambda}};$$

la formule (2) correspond à la valeur $\lambda = 3$.

3° La formule (3) a été donnée par Maclaurin (*Traité des fluxions*) pour le cas de l'ellipsoïde de révolution. Le coefficient a est alors $-\pi\frac{b^2}{a^2}$, b étant le rayon équatorial.

Dans le cas du segment sphérique, on a la formule

$$V = \pi c^2 h - \frac{\pi h^3}{12},$$

qu'on déduit de la formule ordinaire au moyen de la relation déjà écrite

$$c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{h^2}{4}.$$

La formule de Maclaurin a été retrouvée par Desboves (*Questions d'Algèbre*, 1873) pour le cas du segment sphérique, et, pour le cas de l'ellipsoïde de révolution, par le frère Gabriel-Marie (*Géométrie*, F. I. C., 1875) et par Desboves (*Nouvelles Annales*, 1877, p. 227 et 278).

II.

Le volume du prismatoïde est encore donné par la formule

$$V = B''h + P \times \frac{h}{3},$$

P étant l'aire d'un polygone équiangle aux bases et qui a pour côtés la demi-différence de leurs côtés homologues (on considère les faces triangulaires comme des trapèzes ayant une base nulle). Cette formule a été donnée par M. Koppe (*Journal de Crelle,* t. **18**, 1838, p. 275); on en trouve une démonstration dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. VI, p. 408). Cette formule est bien connue dans le cas du tronc de cône.

NOTES.

1. Une Note des *Nouvelles Annales* (1848, p. 245) donne le renseignement suivant : On trouve, dans le *Lilavati* (Chap. VIII, § **221**), cette évaluation du volume d'une pyramide tronquée à bases rectangles

$$V = \frac{h}{6}[ab + a'b' + (a + a')(b + b')],$$

a et b, a' et b' étant les dimensions des deux bases.

Une traduction du *Lilavati* se trouve dans l'Ouvrage de Colebrookes : *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhaskara,* 1817.

2. On peut considérer un tétraèdre comme un prismatoïde, les plans qui donnent B, B', B'' étant parallèles à deux arêtes opposées AB et CD; on retrouve la formule connue

$$V = \frac{1}{6} AB \times CD \times \mu,$$

μ étant le moment des deux droites AB et CD (*Nouvelles Annales, ibid.,* p. 241).