JEAN SERVAIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1908. Composition d'algèbre et de trigonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 370-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__370_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1908. COMPOSITION D'ALGÈBRE ET DE TRIGONOMÉTRIE.

Solution par M. Jean SERVAIS.

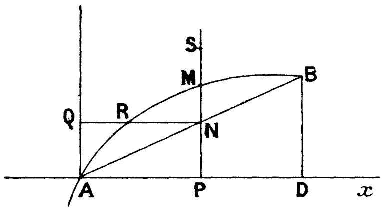
---

1. *Construire la courbe qui représente la fonction*

$$y = 4\,e^{\frac{\log \frac{x}{e}}{(\log x)^2}}.$$

II. *Soit* (C) *l'arc de cette courbe qui a pour origine le point* A, *où elle traverse l'axe des* x, *et pour*

Fig. 1.



extrémité le point B *qui correspond au maximum de* y. *Calculer l'aire* (Σ) *comprise entre l'arc* (C), *l'axe des* x *et l'ordonnée* BD *de* B.

III. *Soit* M *un point quelconque de* (C). *Menons la perpendiculaire* PM *à l'axe des* x; *soit* N *le point où elle rencontre la corde* AB. *Menons par* N *la parallèle à l'axe des* x *qui coupe en* R *l'arc* (C) *et en* Q *la parallèle à l'axe des* y *menée par* A. *Portons sur le prolongement de* PM *une longueur* MS *égale à* QR.

Lorsque M *decrit* (C), S *décrit un arc de courbe* (C'); *cet arc passe au point* A. *Calculer, à un centième près, le coefficient angulaire de la tangente à cet arc* (C') *au point* A.

IV. *Soit* (Σ') *l'aire balayée par le segment de droite* MS *lorsque* M *décrit* (C). *Montrer qu'il existe entre* (Σ) *et* (Σ') *une relation numérique qui subsiste lorsqu'on remplace dans les constructions précédentes l'arc* (C) *par un autre arc de courbe quelconque ayant les mêmes extrémités* A *et* B, *pourvu toutefois que ce nouvel arc soit situé au-dessus de* AB *et ne soit pas rencontré en plus d'un point par une* *parallèle quelconque à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.*

Nota. — *Le signe* log *représente des logarithmes népériens dont la lettre* e *représente la base.*

Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires.

I. Pour que y soit réel et bien déterminé, il faut que la valeur de x soit positive.

Si l'on pose

$$\log x = z,$$

on a

$$y = 4e\,\frac{z-1}{z^2}, \qquad \frac{dy}{dz} = 4e\,\frac{2-z}{z^3}.$$

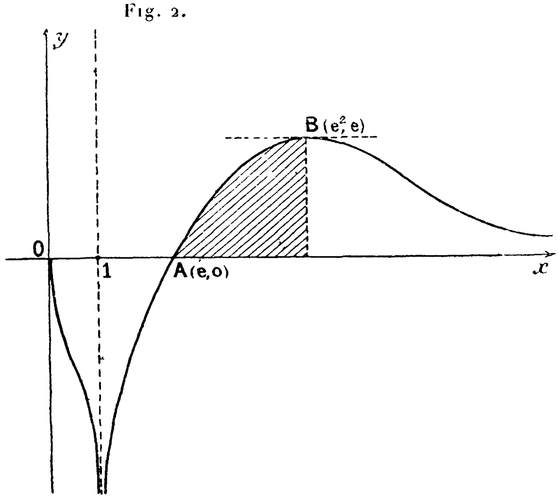
La dérivée s'annule pour

$$z = 2, \qquad x = e^2$$

On a, par suite, le Tableau de variation et la courbe ci-dessous (*fig.* 2) :

x	z	y
0	$-\infty$	0
		décroît
1	0	$-\infty$ / $-\infty$
		croît
e	1	0
		croît
e^2	2	e (max.)
		décroît
$+\infty$	$+\infty$	0

Fig. 2.



La courbe coupe Ox au point A d'abscisse $x = e$.

La tangente à l'origine est verticale, car en ce point

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx} = 4e\,\frac{2-z}{z^3 e^z};$$

la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est infinie, car le dénominateur $z^3 e^z$ tend vers zéro quand z croît indéfiniment par valeurs négatives.

II. L'aire demandée a pour valeur

$$\Sigma = \int_e^{e^2} y\,dx = \int_1^2 4e\,\frac{z-1}{z^2}\,e^z\,dz,$$

ceci s'ecrit

$$\Sigma = 4e\int_1^2 \frac{1}{z}\,de^z + e^z\,d\left(\frac{1}{z}\right) = 4e\int_1^2 d\left(\frac{e^z}{z}\right),$$

$$\Sigma = 4e\left(\frac{e^2}{2} - e\right) = 2e^3 - 4e^2.$$

III. Soient x, y les coordonnées de M et x', y' celles de R. Le point N a pour coordonnées x, y' et, comme il est situé sur AB, on a

$$y' = \frac{x-e}{e-1}.$$

D'ailleurs on a

$$y' = 4e\,\frac{\log x' - 1}{(\log x')^2}.$$

Par suite, on a, entre x' et x, la relation

$$4e\,\frac{\log x' - 1}{(\log x')^2} = \frac{x-e}{e-1}.$$

Soit u le segment QR :

$$u = x' - e,$$

d'où

$$4e\frac{\log(u+e)-1}{[\log(u+e)]^2}=\frac{x-e}{e-1}. \tag{1}$$

Y étant l'ordonnée de S, on a

$$Y=y+u$$

et, par suite, le coefficient angulaire de la courbe (C') est

$$\frac{dY}{dx}=\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dx}.$$

Nous avons déjà calculé $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=4e\frac{2-\log x}{x(\log x)^3};$$

pour avoir $\frac{du}{dx}$, différentions la relation (1) qui donne

$$4e\frac{2-\log(u+e)}{[\log(u+e)]^3}\frac{1}{u+e}du=\frac{dx}{e-1},$$

d'où

$$\frac{du}{dx}=\frac{u+e}{4e(e-1)}\frac{[\log(u+e)]^3}{2-\log(u+e)}.$$

Au point A on a

$$x=e, \qquad u=0;$$

par suite,

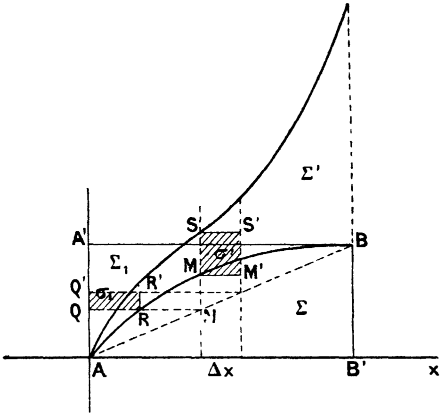
$$\frac{dy}{dx}=4, \qquad \frac{du}{dx}=\frac{1}{4(e-1)},$$

et enfin

$$\frac{dY}{dx}=4+\frac{1}{4(e-1)}.$$

IV. Donnons à x un accroissement Δx, et soit σ' le rectangle élémentaire MM'S'S (*fig.* 3) correspondant de Σ'; à ce rectangle correspond un rectangle élémentaire $\sigma_1 = QRR'Q'$ de l'aire Σ_1 comprise entre la courbe C, la parallèle AA' à Oy et la parallèle $A'B$ à Ox. σ' et σ_1,

Fig. 3.



ayant même hauteur u, sont entre eux comme leurs bases, $MM' = \Delta x$ et $QQ' = \Delta y'$:

$$\frac{\sigma'}{\sigma_1} = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = m,$$

m étant le coefficient angulaire de AB.

On a donc

$$\sigma' = m\sigma_1$$

et par suite, en sommant les rectangles,

$$\Sigma' = m\Sigma_1.$$

Or, dans les hypothèses faites, Σ_1 est égale à la différence entre l'aire du rectangle $AB'BA'$ et Σ. Si l'on désigne AB' par a, on a $BB' = ma$ et, par suite,

$$\Sigma' = m(ma^2 - \Sigma).$$

Cette relation est indépendante de la forme de la courbe.

Dans le cas particulier dont il s'agit,

$$m = \frac{1}{e-1}, \qquad a = e^2 - e;$$

on a donc

$$\Sigma' = \frac{1}{e-1}\left[e^2(e-1) - \Sigma\right].$$