NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PHILBERT DU PLESSIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1908. Composition de géométrie analytique et mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 360-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__360_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1908. COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On considère un plan P *et un système* (S) *de forces appliquées à un solide invariable; ce système, par hypothèse, n'est équivalent ni à une force unique, ni à un couple, ni à zéro.*

I. *Démontrer sans calcul que le système* (S) *peut être en général remplacé par deux forces, l'une* F_1 *normale au plan* P, *l'autre* F_2 *située dans ce plan.*

Indiquer les conditions de possibilité du problème.

II. *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires;* X, Y, Z, L, M, N *les six coordonnées du système* (S), *c'est-à-dire les projections sur les axes de la résultante générale et du moment résultant relatif au point* O.

Soit enfin

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation du plan P.

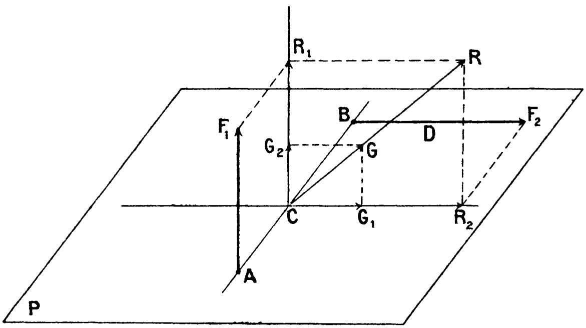
On demande de calculer les coordonnées x_1, y_1, z_1 *du point de rencontre* A *de la force* F_1 *avec le plan* P, *ainsi que l'équation du plan* Π *mené perpendiculairement au plan* P *par la droite* D *qui porte* F_2.

III. *On assujettit le plan* P *à passer par une droite fixe donnée* Δ.

Trouver le lieu géométrique [C] *du point* A, *et le lieu géométrique* [Σ] *de la droite* D, *quand le plan* P *pivote autour de la droite donnée* Δ.

IV. *Former l'équation réduite de la surface* [Σ] *et discuter la nature de cette surface suivant les positions diverses de la droite donnée* Δ.

I. Les forces F_1 et F_2 cherchées étant équipollentes respectivement aux projections orthogonales de la résul-



tante générale sur la normale au plan P et sur ce plan, il est nécessaire, pour qu'aucune d'elles ne soit nulle, que la direction de cette résultante générale, et par suite l'axe central du système, ne soit ni perpendiculaire ni parallèle au plan P.

Cette condition étant supposée remplie, l'axe central rencontrera le plan P en un point C où l'on pourra faire la réduction. Soient, dès lors, R et G la résultante générale et le moment résultant portés sur cet axe central. Projetons orthogonalement ces deux vecteurs en R_1 et G_2 sur la normale en C au plan P, en R_2 et G_1 sur ce plan, puis transportons les vecteurs R_1 et R_2 parallèlement à eux-mêmes en F_1 et F_2, leurs points d'application étant amenés sur la perpendiculaire en C au plan RCG_1 (perpendiculaire contenue dans le plan P), en A et en B, de façon que les moments de F_1 et de F_2 par rapport au point C soient respectivement G_1 et G_2, c'est-à-dire que

$$F_1 = CA.G_1, \qquad F_2 = CB.G_2,$$

le sens de CA ou de CB étant tel que, pour l'observateur CG_1 ou CG_2, le sens de F_1 ou de F_2 soit de gauche à droite.

Remarquons que le moment résultant du système par rapport au point A, se réduisant à celui de F_2, est normal au point P, et le moment résultant par rapport à un point quelconque de la droite BF_2 ou D, se réduisant à celui de F_1, est situé dans ce plan.

II. Les composantes du moment résultant en (x, y, z) étant

$$L - yZ + zY, \qquad M - zX + xZ, \qquad N - xY + yX,$$

on exprime l'orthogonalité de ce moment pris en (x_1, y_1, z_1) et du plan P par les équations

$$(1) \qquad \frac{L - y_1 Z + z_1 Y}{u} = \frac{M - z_1 X + x_1 Z}{v} = \frac{N - x_1 Y + y_1 X}{w},$$

auxquelles il faut joindre

$$(2) \qquad u x_1 + v y_1 + w z_1 + h = 0,$$

puisque le point A est dans le plan P.

La dernière équation (1) peut s'écrire

$$-(v y_1 + w z_1) X + x_1 (vY + wZ) + Mw - Nv = 0.$$

En l'ajoutant à l'équation (2) multipliée par X, on a

$$x_1 (uX + vY + wZ) + Mw - Nv + hX = 0,$$

d'où

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{Nv - Mw - hX}{uX + vY + wZ}, \\ \text{et, par permutation circulaire,} \\ y_1 = \dfrac{Lw - Nu - hY}{uX + vY + wZ}, \\ z_1 = \dfrac{Mu - Lv - hZ}{uX + vY + wZ}. \end{array} \right.$$

De même, puisqu'en tout point de D le moment résultant est situé dans P, cette droite appartient au lieu des points où ce moment est parallèle à P, dont l'équation est

$$u(L - yZ + zY) + v(M - zX + xZ) + w(N - xY + yX) = 0$$

ou

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & x(vZ - wY) + y(wX - uZ) \\ & \qquad + z(uY - vX) + Lu + Mv + Nw = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, on vérifie immédiatement que ce plan est perpendiculaire au plan P, attendu qu'on a identiquement

$$u(vZ - wY) + v(wX - uZ) + w(uY - vX) \equiv 0.$$

Le plan représenté par (4) n'est donc autre que le plan Π de l'énoncé.

III. Si le plan P passe par une droite fixe, on a

$$u = u_1 + \lambda u_2, \qquad v = v_1 + \lambda v_2,$$
$$w = w_1 + \lambda w_2, \qquad h = h_1 + \lambda h_2,$$

λ étant un paramètre arbitraire, et, comme tous les coefficients de (4) sont linéaires en u, v, w, le plan Π passe également par une droite fixe. Si nous posons

$$\begin{aligned} Nv - Mw - hX &= a, \\ Lw - Nu - hY &= b, \\ Mu - Lv - hZ &= c, \\ uX + vY + wZ &= d, \end{aligned}$$

et si nous représentons par a_i, b_i, c_i, d_i ce que deviennent ces quantités quand on y remplace les u, v, w, h par u_i, v_i, w_i, h_i, nous voyons que les coordonnées du point A sont données par

$$\frac{x}{a_1 + \lambda a_2} = \frac{y}{b_1 + \lambda b_2} = \frac{z}{c_1 + \lambda c_2} = \frac{1}{d_1 + \lambda d_2},$$

d'où

$$(5)\qquad \frac{d_2x - a_2}{a_1d_2 - a_2d_1} = \frac{d_2y - b_2}{b_1d_2 - b_2d_1} = \frac{d_2z - c_2}{c_1d_2 - c_2d_1},$$

équations d'une droite qui est le lieu [C] du point A.

De même si, représentant par

$$P = 0 \qquad \text{et} \qquad \Pi = 0$$

les équations des plans P et Π, nous désignons par P_i et Π_i ce que deviennent leurs premiers membres par la même substitution que ci-dessus, nous voyons que, ces équations s'écrivant

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \Pi_1 + \lambda \Pi_2 = 0,$$

le lieu [Σ] de leur droite D d'intersection est donné par

$$(6)\qquad P_1\Pi_2 - P_2\Pi_1 = 0,$$

quadrique réglée dont nous allons discuter la nature, et qui contient d'une part la droite Δ, de l'autre la droite Δ' ($\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$) autour de laquelle pivote le plan Π.

IV. Pour opérer la réduction de l'équation (6), faisons un choix particulier d'axes. Prenons comme axe des z l'axe central du système (S), ce qui revient à faire

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = R,$$
$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = G,$$

et comme axe des x la perpendiculaire commune à cet axe et à la droite Δ dont les équations seront dès lors

$$x = x_0, \qquad y = tz,$$

la signification de t étant fournie par

$$t = \operatorname{tang}\omega,$$

si ω est l'angle de Δ avec la direction de Oz. Cela revient à prendre

$$u_1 = 1, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0, \quad h_1 = -x_0,$$
$$u_2 = 0, \quad v_2 = 1, \quad w_2 = -t, \quad h_2 = 0,$$

d'où se déduisent

$$a_1 = 0, \quad b_1 = -G, \quad c_1 = Rx_0, \quad d_1 = 0,$$
$$a_2 = G, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0, \quad d_2 = -Rt.$$

Les équations (5) deviennent alors

$$(5') \qquad \left\{ \begin{array}{l} Rtx + G = 0, \\ Rx_0 y + Gz = 0, \end{array} \right.$$

et l'équation (6)

$$(6') \quad R(x^2 + y^2) - Rtyz - (Rx_0 + Gt)x + Gtx_0 = 0.$$

Dans le cas où l'angle ω est droit (Δ orthogonale à l'axe central) et, par suite, t infini, cette équation se réduit à

$$(6'') \qquad Ryz + G(x - x_0) = 0.$$

Lorsque t n'est pas infini, l'équation en s de l'équation (6'), préalablement divisée par R, est

$$\begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & -\frac{t}{2} \\ 0 & -\frac{t}{2} & -s \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1-s)\left(s^2 - s - \frac{t^2}{4}\right) = 0,$$

dont les racines sont

$$s_1 = 1, \qquad s_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + t^2},}{2} \qquad s_3 = \frac{1 - \sqrt{1 + t^2}}{2}.$$

On a, d'autre part [avec les notations habituelles (¹)],

$$\frac{H}{\Delta} = -\frac{(Rx_0 - Gt)^2}{4R^2}.$$

Par suite, la forme réduite correspondant à (6′) est

$$(7') \quad x'^2 + \frac{\sqrt{1+t^2}+1}{2} y'^2 - \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{2} z'^2 - \frac{(Rx_0 - Gt)^2}{4R^2} = 0,$$

ou, si l'on se reporte à l'expression ci-dessus de t,

$$(7' \textit{bis}) \quad x'^2 \cos\omega + y'^2 \cos^2\frac{\omega}{2}$$
$$- z'^2 \sin^2\frac{\omega}{2} - \frac{(Rx_0 \cos\omega - G\sin\omega)^2}{4R^2\cos\omega} = 0,$$

équation qui représente un *hyperboloïde à une nappe*, à moins que $\omega = 0$, ou que

$$\text{tang} = \frac{Rx_0}{G},$$

auxquels cas l'hyperboloïde se réduit respectivement à un *cylindre de révolution* ou à un *cône*.

La dernière condition exprime d'ailleurs que la droite Δ', dont les équations $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ sont ici

$$y = 0,$$
$$Rx - Gt = 0,$$

rencontre la droite Δ définie par les équations (5′).

Pour l'équation (6″), également divisée par R, l'équation en s est

$$\begin{vmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & -s & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -s \end{vmatrix} = 0$$

(¹) NIEWENGLOWSKI, *Cours de Géométrie analytique*, t. III, p. 271.

ou

$$s\left(s^2-\frac{1}{4}\right)=0,$$

dont les racines sont

$$s_1=0, \qquad s_2=\frac{1}{2}, \qquad s_3=-\frac{1}{2}.$$

On a d'ailleurs ici (¹)

$$\frac{H}{P}=-\frac{G^2}{4R^2},$$

d'où la forme réduite

$$y'^2-z'^2-\frac{2G}{R}x'=0, \tag{7''}$$

représentative d'un *paraboloïde hyperbolique équilatère.*

REMARQUES GÉOMÉTRIQUES.

Si l'on a recours à la notion du complexe de Chasles (complexe linéaire des axes de moment nul du système) on peut remarquer que, puisque le moment résultant en A est normal au plan P, ce point A est le foyer du plan P. Par suite, lorsque ce plan varie en passant par une droite fixe Δ, le point A décrit la droite conjuguée de Δ. Tel est donc le lieu [C].

Toutes les droites du complexe qui passent par le point I, à l'infini sur le support de F_1, rencontrent le support D de F_2. Autrement dit, le plan polaire de I est le plan Π mené par D perpendiculairement au plan P. Or, lorsque le plan P pivote autour de Δ, le point I décrit la droite à l'infini [I] des plans perpendiculaires à Δ. Son plan polaire Π passe, par suite, constamment par la droite Δ' conjuguée de [I].

(¹) NIEWENGLOWSKI, *Cours de Géométrie analytique,* t. III, p. 271.

La droite D apparaît donc comme l'intersection de deux plans P et Π rectangulaires, passant chacun par une droite fixe, Δ pour l'un, Δ′ pour l'autre. Le lieu [Σ] de cette droite est donc l'hyperboloïde de Chasles défini par ces deux droites. Cet hyperboloïde se réduit à un cylindre de révolution si elles sont parallèles et à un cône si elles se rencontrent. Elles ne peuvent d'ailleurs être parallèles que si Δ est parallèle à l'axe du complexe, avec lequel Δ′ vient alors coïncider.

Si Δ est orthogonale à l'axe, Δ′ est la droite à l'infini du plan mené par cet axe perpendiculairement à Δ, et l'hyperboloïde de Chasles devient un paraboloïde hyperbolique, d'ailleurs équilatère puisque sa génératrice Δ est perpendiculaire au plan directeur contenant Δ′.

NOTE ADDITIONNELLE.

Il n'est pas sans intérêt de montrer comment se pouvait résoudre la Partie II si l'on ne songeait pas à utiliser les remarques énoncées à la fin de la solution de la Partie I ci-dessus, relativement à la direction du moment résultant soit en A, soit en un point courant de D.

Si donc, (x_1, y_1, z_1) étant le point A, (x_2, y_2, z_2) un point courant de D, on représente par X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 les composantes des forces F_1 et F_2, on a immédiatement

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + h = 0, \tag{1}$$

$$ux_2 + vy_2 + wz_2 + h = 0, \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} X &= X_1 + X_2, \\ Y &= Y_1 + Y_2, \\ Z &= Z_1 - Z_2, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} L &= y_1 Z_1 - z_1 Y_1 + y_2 Z_2 - z_2 Y_2, \\ M &= z_1 X_1 - x_1 Z_1 + z_2 X_2 - x_2 Z_2, \\ N &= x_1 Y_1 - y_1 X_1 + x_2 Y_2 - y_2 X_2, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

puis, en exprimant que la force F_1 est normale au plan P,

$$\frac{X_1}{u} = \frac{Y_1}{v} = \frac{Z_1}{w}, \tag{5}$$

et que la force F_2 est dans ce plan,

$$uX_2 + vY_2 + wZ_2 = 0, \tag{6}$$

soit en tout onze équations pour déterminer les onze inconnues constituées par $x_1, y_1, z_1, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ et deux des coordonnées x_2, y_2, z_2, la troisième étant arbitraire puisqu'il s'agit d'un point quelconque de la droite D.

Calculons dès lors x_1, y_1, z_1.

Des deux premières équations (4) nous déduisons

$$\begin{aligned} Lv - Mu = {} & Z_1(vy_1 + ux_1) - z_1(vY_1 + uX_1) \\ & + Z_2(vy_2 + ux_2) - z_2(vY_2 + uX_2) \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (1), (2) et (6),

$$\begin{aligned} Lv - Mu = {} & Z_1(wz_1 + h) - z_1(vY_1 + uX_1) \\ & - Z_2(wz_2 + h) + z_2 wZ_2 \\ = {} & -(uX_1 + vY_1 + wZ_1)z_1 - h(Z_1 + Z_2). \end{aligned}$$

Or, des équations (3), eu égard à (6), on tire

$$uX + vY + wZ = uX_1 + vY_1 + wZ_1.$$

Il vient donc finalement

$$Lv - Mu = -(uX + vY + wZ)z_1 - hZ,$$

d'où

$$z_1 = \frac{Mu - Lv - hZ}{uX + vY + wZ}.$$

Pour x_1 et y_1, il suffit de faire une permutation circulaire. On retrouve ainsi les formules ci-dessus.

Passons au plan Π. Ce plan, contenant le point (x_2, y_2, z_2) et la force de composantes (X_2, Y_2, Z_2), et étant perpendiculaire au plan P dont la normale a pour paramètres directeurs (u, v, w), aura une équation de la forme

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$x\,(w\,Y_2 - v\,Z_2) + y\,(u\,Z_2 - w\,X_2) + z\,(v\,X_2 - u\,Y_2)$$
$$-[x_2(w\,Y_2 - v\,Z_2) + y_2(u\,Z_2 - w\,X_2) + z_2(v\,X_2 - u\,Y_2)] = 0.$$

Or, si l'on tient compte des équations (5), les équations (3) donnent immédiatement

$$w\,Y_2 - v\,Z_2 = w\,Y - v\,Z, \qquad u\,Z_2 - w\,X_2 = u\,Z - w\,X,$$
$$v\,X_2 - u\,Y_2 = v\,X - u\,Y,$$

et les équations (4)

$$\begin{aligned} &L\,u + M\,v + N\,w \\ &\quad = x_2(w\,Y_2 - v\,Z_2) + y_2(u\,Z_2 - w\,X_2) + z_2(v\,X_2 - u\,Y_2). \end{aligned}$$

Il vient, par suite, pour l'équation du plan Π,

$$\begin{aligned} &x\,(v\,Z - w\,Y) + y\,(w\,X - u\,Z) - z\,(u\,Y - v\,X) \\ &\qquad\qquad + L\,u + M\,v + N\,w = 0. \end{aligned}$$

Remarque. — Les équations (5) exprimant que F_1 est normale au plan P n'interviennent pas dans le calcul de x_1, y_1, z_1. Et, en effet, *le point* A *est indépendant de la direction de* F_1, *pourvu que* F_2 *soit dans le plan* P, attendu que, quelle que soit cette direction, le point A reste toujours celui où le moment résultant est normal au plan P, c'est-à-dire le foyer de ce foyer.