J. HAAG

Note sur les surfaces à lignes de courbure planes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 353-359

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__353_1>

[O5iα]

NOTE SUR LES SURFACES A LIGNES DE COURBURE PLANES;

PAR M. J. HAAG,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Douai.

Soient (S) une courbe gauche et u l'arc de cette courbe, compté à partir d'une certaine origine. Attachons à cette courbe un trièdre (T) dont l'origine sera en un point quelconque de (S); l'axe des x sera la tangente, My sera la normale principale et Mz la binormale. On sait qu'on a alors le système de translations et de rotation suivant :

$$\xi = 1, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad p = -\frac{1}{\tau}, \quad q = 0, \quad r = \frac{1}{\rho},$$

ρ et τ étant les rayons de courbure et de torsion, et la variable u jouant le rôle du temps.

Ceci étant, imaginons que dans le plan Mxy on trace une courbe (C) dont les équations paramétriques soient

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = 0.$$

Quand u varie, cette courbe engendre une certaine surface (Σ).

Cherchons d'abord la condition pour que sur cette surface les courbes $v =$ const. soient les trajectoires orthogonales des courbes (C). Quand u seul varie, les déplacements élémentaires d'un point P quelconque de (C) sont

$$Dx = \left(\frac{\partial x}{\partial u} - ry\right) du, \quad Dy = \left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right) du, \quad Dz = py\, du.$$

La condition d'orthogonalité cherchée est donc

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial u} - ry\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right)\frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

On remarque que cette équation ne renferme que r. Or, *quelle relation y a-t-il entre différentes courbes gauches pour lesquelles le rayon de courbure a même expression en fonction de l'arc de la courbe?* Si nous considérons la développable (D) dont (S) est l'arête de rebroussement, on voit immédiatement que l'élément linéaire de cette développable est

$$ds^2 = dx^2 + r^2 x^2 du^2.$$

Il ne dépend que de r.

On déduit de ces remarques le théorème suivant :

Théorème. — *Considérons une famille quelconque* *de sections planes* (C) *d'une surface quelconque* (Σ), *et soient* (C′) *leurs trajectoires orthogonales sur cette surface. Les plans des courbes* (C) *ont une certaine enveloppe* (D). *Déformons cette enveloppe sans déchirure ni duplicature, de telle façon que ses génératrices rectilignes demeurent des droites. Si chaque plan tangent entraîne avec lui la courbe* (C) *correspondante, on obtiendra une nouvelle surface* (Σ_1). *Les points des différentes courbes* (C) *qui étaient primitivement sur une même trajectoire orthogonale* (C′) *demeurent encore, après la déformation, sur une même trajectoire orthogonale* (C'_1) *des courbes* (C_1).

Ce théorème présente une grande analogie avec un théorème démontré par Ribaucour sur les congruences de courbes planes [1].

Supposons maintenant que les courbes (C) soient lignes de courbure sur (Σ). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit que l'angle θ que fait la tangente à (C′) avec le plan Mxy soit une fonction de u. Or, si l'on pose

$$A^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} - ry\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right)^2 + p^2y^2,$$

on a

$$\sin\theta = \frac{py}{A},$$

d'où

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} - ry\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right)^2 = \cot^2\theta\, p^2 y^2$$

ou

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} - ry\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right)^2 = U^2y^2, \tag{2}$$

---

[1] Ribaucour, *Sur la deformation des surfaces* (*Comptes rendus*, t LXX, 1870, p. 330).

en posant

$$(3) \qquad U = p \cot\theta.$$

Pour avoir la surface à lignes de courbure planes la plus générale, il faut donc résoudre le système (1), (2) par rapport à x et y. Ayant résolu ce système, on en déduira des courbes (C) que l'on placera dans les différents plans osculateurs de la courbe gauche (S) la plus générale dont la courbure évaluée en fonction de l'arc est égale à r. Ces courbes seront lignes de courbure d'une surface qui coupera leurs plans respectifs sous un angle θ tel que l'on ait

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{p}{U},$$

p désignant la torsion de (S) changée de signe.

On pourra en particulier supposer que la fonction p, qui peut être prise arbitrairement, soit égale à Ui. On aura alors

$$\operatorname{tang}\theta = i,$$

d'où

$$A^2 = 0.$$

Par suite, les tangentes à (C') seront des droites isotropes. On en déduit immédiatement que, si les courbes (C) ne sont pas des droites isotropes, la surface (Σ) devient alors une développable circonscrite au cercle imaginaire de l'infini.

On déduit de tout ce qui précède le théorème suivant :

Théorème. — *Soient* (Δ) *une développable isotrope et* (D) *une autre développable quelconque. Déformons* (D) *de façon que ses génératrices demeurent rectilignes et supposons que ses plans tangents entraînent avec eux les courbes suivant lesquelles* *ils coupaient* (Δ). *Après la déformation la plus générale, ces courbes planes constituent des lignes de courbure de la surface sur laquelle elles se trouvaient. De plus, toute surface à lignes de courbure planes peut être obtenue de cette façon.*

Ce théorème est d'ailleurs fort connu (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces,* t. IV, p. 206).

Étudions maintenant le système (1), (2). On en déduit tout d'abord que la surface à lignes de courbure planes la plus générale dépend de quatre fonctions arbitraires d'une variable, à condition toutefois de choisir convenablement la variable v. Nous ne nous occuperons pas de l'intégration de ce système. Nous allons simplement lui faire subir quelques transformations qui nous conduiront à un résultat intéressant.

On satisfait aux équations (1) et (2) en posant

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = ry + \mathrm{U}y\cos\varphi, \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} = -rx + \mathrm{U}y\sin\varphi, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\lambda\sin\varphi, \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial v} = \lambda\cos\varphi, \end{cases}$$

les fonctions λ et φ étant des fonctions inconnues de u et de v. Ces fonctions ont d'ailleurs une signification géométrique simple. D'abord φ désigne l'angle de Mx avec la normale en P à (C). Puis, si l'on appelle σ l'arc de la courbe (C), on a

$$\lambda = \frac{\partial\sigma}{\partial v},$$

de sorte que le rayon de coubure (C) est égal à $\dfrac{\lambda}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\cdot$ Égalons maintenant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$, ainsi que celles de $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$, que l'on peut déduire de (4) et (5). On a

$$(r + \mathrm{U}\cos\varphi)\,\lambda\cos\varphi - \mathrm{U}y\sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\lambda\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\lambda}{\partial u}\sin\varphi,$$

$$r\lambda\sin\varphi + \mathrm{U}\sin\varphi\lambda\cos\varphi + \mathrm{U}y\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$
$$= -\lambda\sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\lambda}{\partial u}\cos\varphi,$$

d'où l'on déduit aisément

$$(6) \qquad r + \mathrm{U}\cos\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0,$$

$$\mathrm{U}y\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial\lambda}{\partial u}.$$

Si l'on voulait achever l'intégration du système (1), (2), il faudrait tirer y de cette dernière équation et porter dans (3) et (4). Mais on est conduit à des calculs qui semblent compliqués. Occupons-nous seulement de l'équation (6), qui nous donne l'angle φ. Si l'on pose $\tang\frac{\varphi}{2} = t$, elle devient une équation de Riccati en t. Si nous convenons alors d'appeler *rapport anharmonique* de quatre tangentes à une courbe plane quelconque le rapport anharmonique de quatre tangentes parallèles menées à un cercle du plan de cette courbe, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Considérons, sur une surface à lignes de courbure planes, quatre lignes de seconde courbure quelconques. Ces quatre lignes rencontrent chaque ligne de première courbure en quatre points dont les tangentes ont un rapport anharmonique constant.*

Si l'on suppose en particulier une surface à lignes de courbure circulaires, on retrouve un théorème dû à M. Picard (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VI, 1877, p. 362).

Plus particulièrement encore, on en déduit que :

Étant donnée une famille quelconque de cercles sur une sphère, quatre de leurs trajectoires orthogonales coupent tous les cercles de la famille en quatre points de même rapport anharmonique.

D'où l'on déduit par inversion le même théorème pour une famille plane de cercles (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 116). Si l'on combine cette dernière propriété avec le premier théorème de cette Note, on obtient immédiatement une proposition due à M. Demartres [1] :

Théorème. — *Étant donnée une surface quelconque possédant une famille de cercles, quatre trajectoires orthogonales quelconques coupent chaque cercle en quatre points de rapport anharmonique constant.*

Nous terminerons en faisant remarquer que, d'après ce qui précède, *la détermination des lignes de seconde courbure d'une surface à lignes de courbure planes se ramène à l'intégration d'une équation de Riccati.* Nous savons même quelles variables il faudra choisir pour tomber sur cette équation. Enfin, il résulte de là que, si l'on connaît une, deux ou trois lignes de seconde courbure, les autres se détermineront par deux, une ou zéro quadratures.

---

[1] *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, 1885.