Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 332-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__332_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1745.

(1896, p 440.)

On pose

$$\alpha_n = (ax^2 + bx + c)(2ax^2 + bx + c)\ldots(nax^2 + bx + c).$$

1° *Démontrer que l'expression*

$$1 + C_n^1 \alpha_1 + C_n^2 \alpha_2 + \ldots + C_n^n \alpha_n$$

peut se mettre sous la forme

$$(c+1)^n + P_1 x(c+1)^{n-1} + P_2 x^2 (c+1)^{n-2} + \ldots + P_n x^n,$$

P_p *étant un polynome entier en* a, b, x *indépendant de* c.

2° *Pour* $x = 0$, $(P_n)_{x=0}$ *est un polynome entier en* a *et* b. *Trouver ce polynome développé par rapport aux puissances décroissantes de* b. *Démontrer que si* a *est positif, ce polynome, considéré comme fonction de* b, *a toutes ses racines réelles; si* a *est négatif, il a au plus une racine réelle.* (R. GILBERT.)

SOLUTION

Par M. R. GILBERT.

1° Considérons la suite u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ... définie par

$$u_1 = (h+k)u_0,$$

$$(1) \qquad u_n = (hn + k)u_{n-1} - h(n-1)u_{n-2};$$

proposons-nous de calculer u_n en fonction de n.

De la relation (1) on déduit

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = [h(n+1) + k - 1]\, u_n - hnu_{n-1}$$

ou

$$\Delta u_n = [h(n+1) + k]\, \Delta u_{n-1} - h(n-1)\, \Delta u_{n-2}.$$

On voit que cette relation est de la même forme que (1). Alors, en appliquant p fois le même calcul, on trouve

$$\Delta^p u_n = [h(n+p) + k)\, \Delta^p u_{n-1} - h(n-1)\, \Delta^p u_{n-2},$$

ce qui donne en particulier la relation

$$\Delta^{p+1} u_0 = [h(p+1) + k - 1]\, \Delta^p u_0,$$

et, par suite, en posant

$$(2) \qquad \beta_p = (h + k - 1)(2h + k - 1)\ldots(ph + k - 1),$$

on a

$$\Delta_p u_0 = u_0 \beta_p,$$

c'est-à-dire, pour u_n,

$$u_n = u_0(1 + C_n^1 \beta_1 + C_n^2 \beta_2 + \ldots + C_n^n \beta_n)$$

ou encore symboliquement (Lucas, *Théorie des nombres*, Chap. XIII),

$$u_n = u_0(1 + \beta)^{(n)}.$$

Les formules (1), (2) peuvent être modifiées de la façon suivante.

Posons

$$u_n = v_n y^n,$$

y étant pour le moment un paramètre arbitraire.

Alors

$$v_n = \left(\frac{h}{y} n + \frac{k}{y}\right) v_{n-1} - \frac{h}{y^2}(n-1)\, v_{n-2},$$

et il est facile de voir que les relations (1) et (2) pourront s'identifier avec les suivantes :

$$(3) \qquad v_n = (anx + b)\, v_{n-1} + ac(n-1)\, v_{n-2},$$

$$(4) \quad \alpha_p = (ax^2 + bx + c)(2ax^2 + bx + c)\ldots(nax^2 + bx + c).$$

Il suffit de déterminer y, h et k de façon que

$$\begin{aligned} k &= by, \\ x &= -cy, \\ h &= -acy^2, \\ \alpha_p &= (-c)^p \beta_p, \end{aligned}$$

et la relation entre les u et les β devient

$$v_n x^n = (\alpha - c)^{(n)}.$$

D'où l'on déduit

$$\alpha^{(n)} = (vx + c)^{(n)},$$

puis

$$(\alpha + 1)^{(n)} = (vx + c + 1)^{(n)}.$$

Si donc on pose

$$Q_n = 1 + C_n^1 \alpha_1 + C_n^2 \alpha_2 + \ldots + C_n^n \alpha_n,$$

on a

$$\begin{aligned} Q_n = (c+1)^n v_0 + C_n^1 v_1 x (c+1)^{n-1} + \ldots \\ + C_n^p v_p x^p (c+1)^{n-p} + \ldots + C_n^n v_n x^n. \end{aligned}$$

Nous n'avons pas encore pour Q_n le développement indiqué dans l'énoncé, car, d'après (3), v_p est un polynome en α, b, x, etc.

Mais remarquons qu'il résulte de cette même relation (3) que v_{2p} et v_{2p+1} sont des polynomes en $(c+1)$ de degré p, c'est-à-dire que

$$v_p = V_p^0 + V_p^1 (c+1) + V_p^2 (c+1)^2 + \ldots + V_p^{p-q} (c+1)^{p-q},$$

V_p^k étant un polynome en a, b, x indépendant de c. Remplaçons dans Q_n; on voit que le coefficient de $(c+1)^{n-p}$, en supposant Q_n ordonné par rapport aux puissances de $(c+1)$, est

$$x^p (C_n^p V_p^0 + x\, C_n^{p+1} V_{p+1}^1 + x^2 C_n^{p+2} V_{p+2}^2 + \ldots) = x^p P_p.$$

2° L'expression de P_p pour $x = 0$ est le produit par C_n^p de V_p^0 où l'on fait $x = 0$, ou encore le produit par C_n^p de v_p où l'on fait à la fois $x = 0$ et $c = -1$. Dans ces conditions, la relation (3) devient

$$v_n = b\, v_{n-1} - a(n-1)\, v_{n-2}.$$

Nous avons à étudier les polynomes v_n considérés comme fonctions de b. Or d'abord, si a est positif, ces polynomes jouissent des propriétés des suites de Sturm, et par conséquent ont toutes leurs racines réelles. Pour voir ce qui arrive lorsque a est négatif, calculons d'abord les polynomes v_n ordonnés en b.

Il est facile de voir que si l'on pose

$$w_1 = (b-1)\,w_0 = (b-1)\,v_0,$$

puis

$$w_n = (b-1)\,w_{n-1} - a(n-1)\,w_{n-2},$$

on a

$$v_n = (w+1)^{(n)},$$

ce qui permet de calculer v_n :

$$v_n = \left[b^n - \frac{n(n-1)}{2} b^{n-2} a \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} b^{n-4} a^2 + \ldots \right] v_0.$$

Si a est négatif : 1° si n est pair, v_n est toujours positif ; 2° si n est impair, v_n est le produit par b d'une quantité positive. Donc v_n a, dans ce cas, au plus une racine réelle, qui est nulle.

2070.

(1907, p. 95.)

A quelles conditions doit satisfaire un tétraèdre pour que les droites qui joignent chaque sommet au centre du cercle circonscrit à la face opposée f appartiennent à un même hyperboloïde ? (Dr P. Zeemann.)

SOLUTION
Par M. Tètu.

J'applique en chaque sommet du tétraèdre trois forces dirigées respectivement suivant les arêtes de ce sommet. Je vais déterminer ces forces de façon que les trois qui sont appliquées en un même sommet se composent suivant la droite joignant ce sommet au centre du cercle circonscrit de la face opposée. Et je chercherai les conditions pour que le tétraèdre soit en équilibre sous l'action d'un tel système.

D'ailleurs, pour qu'un système de forces appliquées suivant les arêtes d'un tétraèdre soit en équilibre, il faut et il suffit que les forces dirigées suivant chaque arête se fassent équilibre.

Cela posé, soient ABCD le tétraèdre, β, γ, δ les angles de la face opposée à β et, de même, α'', β'', δ; α''', β''', γ'''. On reconnaît facilement que, pour que les trois forces appliquées en A aient leur résultante suivant la droite indiquée, elles doivent être proportionnelles à

$$AB.\sin 2\beta,\quad AC.\sin 2\beta,\quad AD.\sin 2\delta.$$

Donc, pour que le tétraèdre réponde à la question, on devra avoir

$$\frac{\sin 2\alpha'}{\lambda}=\frac{\sin 2\beta}{\mu},\qquad \frac{\sin 2\alpha''}{\lambda}=\frac{\sin 2\gamma}{\nu},\qquad \frac{\sin 2\alpha'''}{\lambda}=\frac{\sin 2\delta}{\rho},$$
$$\frac{\sin 2\beta''}{\mu}=\frac{\sin 2\gamma}{\nu},\qquad \frac{\sin 2\beta'''}{\mu}=\frac{\sin 2\delta'}{\rho},\qquad \frac{\sin 2\gamma'''}{\nu}=\frac{\sin 2\gamma''}{\rho}.$$

Éliminons γ, μ, ν, ρ entre ces 6 équations :

$$\sin 2\alpha' \sin 2\beta'' \sin 2\gamma = \sin 2\alpha'' \sin 2\beta \sin 2\gamma',$$
$$\sin 2\alpha'' \sin 2\gamma''' \sin 2\delta = \sin 2\alpha''' \sin 2\gamma \sin 2\delta',$$
$$\sin 2\alpha''' \sin 2\beta \sin 2\delta' = \sin 2\alpha' \sin 2\beta \sin 2\delta.$$

Telles sont les conditions demandées.