R. BRICARD

Sur les polygones inscrits et circonscrits à des quadriques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 317-330

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__317_1>

[L²10f]

SUR LES POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS A DES QUADRIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. R BRICARD.

1. On doit à M. Darboux un beau théorème qui constitue une extension à l'espace de celui de Poncelet relatif aux polygones inscrits et circonscrits à des coniques. L'éminent géomètre, qui a fait connaître ce théorème en 1870 (¹), l'énonce ainsi qu'il suit dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (t. II, p. 303) :

Si un polygone est circonscrit à deux surfaces homofocales et si ses sommets sont placés sur d'autres surfaces homofocales aux premières, de telle manière que la normale en chacun de ces sommets à la

(¹) *Bulletin de la Société philomathique*, t. VII, 1870, p. 92.

surface homofocale qui contient ce sommet soit la bissectrice intérieure de l'angle formé par les deux côtés de l'angle qui se croisent en ce sommet, il y aura une infinité de polygones ayant les mêmes propriétés, l'un quelconque des sommets de ces polygones pouvant se déplacer arbitrairement sur la surface qu'il est assujetti à décrire.

La démonstration de M. Darboux repose sur la considération d'un système abélien d'équations différentielles de la forme

$$\frac{du_1}{\sqrt{P(u_1)}} + \frac{du_2}{\sqrt{P(u_2)}} + \frac{du_3}{\sqrt{P(u_3)}} = 0,$$
$$\frac{u_1\,du_1}{\sqrt{P(u_1)}} + \frac{u_2\,du_2}{\sqrt{P(u_2)}} + \frac{u_3\,du_3}{\sqrt{P(u_3)}} = 0$$

[où $P(u)$ désigne un polynome du sixième degré], système qui s'intègre algébriquement, comme on sait. On peut également, comme l'a fait voir M. Staude (¹), faire intervenir des fonctions Θ à quatre paires de périodes.

La démonstration que je vais développer est d'un caractère beaucoup plus élémentaire. La proposition à laquelle elle conduit n'est d'ailleurs pas identique, ainsi qu'on le verra, à la précédente. Dans cette dernière il est nettement spécifié que les normales aux diverses surfaces homofocales introduites sont les bissectrices *intérieures* des angles du polygone. Cette condition n'est pas exigée dans l'énoncé qui sera donné plus loin.

Les principes sur lesquels je m'appuierai sont très simples. Mais, pour donner à la démonstration toute la rigueur désirable, il est nécessaire de présenter en premier lieu quelques remarques sur les polygones circonscrits aux quadriques.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XXII, 1883, p. 1 et 145.

2. Soient (Q) une quadrique, $A_1 A_2 \ldots A_n$ un polygone de n côtés circonscrit à cette quadrique. Appelons $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les points de contact respectifs des côtés $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $\ldots$, $A_n A_1$. Le théorème de Carnot fournit immédiatement la relation

$$\left(\frac{A_1 B_1}{B_1 A_2}\right)^2 \left(\frac{A_2 B_2}{B_2 A_3}\right)^2 \cdots \left(\frac{A_n B_n}{B_n A_1}\right)^2 = 1,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{A_1 B_1}{B_1 A_2} \frac{A_2 B_2}{B_2 A_3} \cdots \frac{A_n B_n}{B_n A_1} = \pm 1.$$

On voit donc qu'il existe deux espèces de polygones circonscrits à (Q) : ceux pour lesquels l'égalité (1) a lieu avec le signe $+$ dans le second membre, ceux pour lesquels elle a lieu avec le signe $-$. Je dirai que les polygones de la première catégorie sont *régulièrement circonscrits* et que ceux de la deuxième catégorie sont *irrégulièrement circonscrits* à (Q).

Cela posé, considérons une quadrique (Q) et un polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ circonscrit (régulièrement ou non) à cette quadrique. Soient toujours $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les points de contact des côtés successifs $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $\ldots$, $A_n A_1$. On a

$$(2) \qquad \frac{A_1 B_1}{B_1 A_2} \frac{A_2 B_2}{B_2 A_3} \cdots \frac{A_n B_n}{B_n A_1} = \varepsilon,$$

ε étant égal à ± 1 suivant que le polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ est régulièrement ou irrégulièrement circonscrit à (Q).

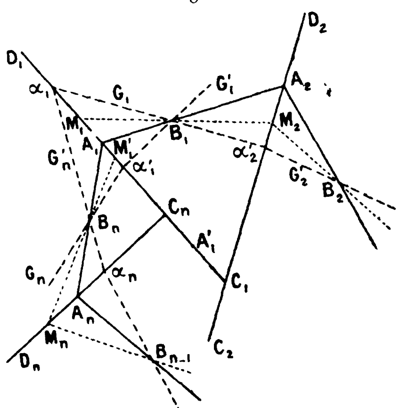
Appelons $D_2, D_3, \ldots, D_n, D_1$ (*fig.* 1) les droites conjuguées par rapport à (Q) des droites $B_1 B_2$, $B_2 B_3$, $\ldots$, $B_n B_1$: la droite D_i passe par le point A_i.

Les droites D_i et D_{i+1} étant toutes deux situées dans le plan tangent à (Q) au point B_i se rencontrent en un point C_i. Les droites $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sont ainsi les côtés consécutifs d'un polygone $C_n C_1 C_2 \ldots C_{n-1}$, auquel est inscrit le polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$. Je vais démontrer la relation

$$(3) \qquad \frac{C_n A_1}{A_1 C_1} \frac{C_1 A_2}{A_2 C_2} \cdots \frac{C_{n-1} A_n}{A_n C_n} = (-1)^n \varepsilon.$$

A cet effet considérons un point M_1 variable sur D_1. Joignons-le à B_1 et soit M_2 le point de rencontre de

Fig. 1.



$M_1 B_1$ avec D_2. Soit de même M_3 le point de rencontre de $M_2 B_2$ avec D_3 et ainsi de suite. Le point M_n obtenu sur D_n étant joint à B_n, la droite $M_n B_n$ rencontre D_1 en un point M'_1. Il est clair que M_1 et M'_1 engendrent sur D_1 des divisions homographiques dont A_1 est un point double. Nous allons chercher à préciser davantage la nature de la correspondance entre les points M_1 et M'_1. Pour cela on aura recours à la considération des génératrices de la quadrique (Q). Ces génératrices se répartissent en deux systèmes, et je désignerai par G_i et G'_i les génératrices passant par le point B_i et appartenant respectivement à ces deux systèmes. G_i et G'_i rencontrent la droite D_i aux deux points d'intersection α_i et α'_i de cette droite avec (Q); G_{i-1} et G'_{i-1} passent respectivement par α'_i et α_i.

D'après cela, si le point M_1 vient en α_1, le point M_2 vient en α'_2, le point M_3 en α_3, et ainsi de suite. Il y a maintenant deux cas à distinguer.

1° *n est pair.* Alors M_1 étant venu en α_1, M_n vient en α'_n et M'_1 vient en α_1. De même, si M_1 vient en α'_1, M'_1 vient aussi en α'_1. On voit donc que les divisions homographiques engendrées par M_1 et M'_1 ont trois points doubles A_1, α_1 et α'_1. Ceci ne peut avoir lieu que si ces divisions sont confondues. Ainsi, lorsque n est pair, M'_1 se confond avec M_1, quelle que soit la position de ce dernier point. Autrement dit, il existe une infinité de polygones ayant leurs sommets sur D_1, D_2, ..., D_n et dont les côtés passent respectivement par les points B_1, B_2, ..., B_n.

2° *n est impair.* Alors, si le point M_1 vient en α_1, M_n vient en α_n et M'_1 en α'_1. De même, si le point M_1 vient en α'_1, M'_1 vient en α_1. On conclut de là que dans le cas actuel M_1 et M'_1 engendrent des divisions en involution, définies par la conditon que A_1 est un point double et que α_1 et α'_1 sont un couple de points conjugués.

Le second point double de l'involution est le point A'_1, conjugué harmonique de A_1 par rapport à $\alpha_1\alpha'_1$. M_1 et M'_1 étant deux points correspondants quelconques, on a

$$\frac{A_1M_1}{A_1M'_1} = -\frac{A'_1M_1}{A'_1M'_1}.$$

En particulier, si A_1M_1 et $A_1M'_1$ sont infiniment petits, le second membre se réduit à -1 et l'on a

$$A_1M'_1 = -A_1M_1.$$

On peut donc énoncer le résultat suivant, valable que n soit pair ou impair :

Si le point M_1 *est infiniment voisin du point* A_1, *le point* M'_1, *obtenu par la construction indiquée plus haut, est tel que l'on ait*

$$(4)\qquad A_1M'_1 = (-1)^n A_1M_1.$$

Il est maintenant facile de démontrer la relation (3). Supposons toujours le point M_1 infiniment voisin du point A, et appliquons le théorème classique des transversales au triangle $A_1C_1A_2$, coupé par la transversale $M_1B_1M_2$, au triangle $A_2C_2A_3$, coupé par la transversale $M_2B_2M_3$, et ainsi de suite. On a

$$\frac{M_1A_1}{M_1C_1}\,\frac{B_1A_2}{B_1A_1}\,\frac{M_2C_1}{M_2A_2} = 1.$$

Comme M_1C_1 diffère infiniment peu de A_1C_1 et M_2C_1 infiniment peu de A_2C_1, on peut écrire

$$\frac{M_1A_1}{A_1C_1}\,\frac{B_1A_2}{B_1A_1}\,\frac{A_2C_1}{M_2A_2} = 1,$$

ou encore

$$\frac{C_1A_2}{A_1C_1} = \frac{A_2M_2}{A_1M_1}\,\frac{A_1B_1}{B_1A_2}.$$

De même

$$\frac{C_2A_3}{A_2C_2} = \frac{A_3M_3}{A_2M_2}\,\frac{A_2B_2}{B_2A_3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{C_{n-1}A_n}{A_{n-1}C_{n-1}} = \frac{A_nM_n}{A_{n-1}M_{n-1}}\,\frac{A_{n-1}B_{n-1}}{B_{n-1}A_n},$$

et enfin

$$\frac{C_nA_1}{A_nC_n} = \frac{A_1M'_1}{A_nM_n}\,\frac{A_nB_n}{B_nA_1}.$$

Multiplions ces relations membre à membre, en tenant compte de (2) et de (4); il vient

$$\frac{C_nA_1}{A_1C_1}\,\frac{C_1A_2}{A_2C_2}\cdots\frac{C_{n-1}A_n}{A_nC_n} = (-1)^n\varepsilon,$$

ce qui est bien la relation (3) dont la suite montrera l'importance.

3. Soient maintenant deux quadriques homofocales (Q) et (Q'). Par un point M de l'espace on peut leur mener quatre tangentes communes MT_1, MT_2, MT_3 et MT_4, qui sont les quatre génératrices communes aux deux cônes (S) et (S') de même sommet M, circonscrits respectivement à (Q) et à (Q'). Or ces deux cônes ont, comme l'on sait, les mêmes axes principaux, qui sont les normales aux trois surfaces homofocales à (Q) et (Q'), qui passent par le point M. Les symétriques de l'une des tangentes communes, MT_1 par exemple, par rapport à ces trois axes, sont respectivement MT_2, MT_3 et MT_4.

Si l'on se donne *a priori* le couple des tangentes MT_1 et MT_2, celui des axes principaux des cônes (S) et (S') par rapport auxquels ces tangentes sont symétriques est parfaitement déterminé, et il en est de même de la surface homofocale qui a cet axe pour normale. Nous dirons que cette surface *appartient* au couple de tangentes communes MT_1, MT_2.

Cela posé, considérons un polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ circonscrit à la fois aux quadriques (Q) et (Q'). Nous désignerons par B_1, B_2, ..., B_n les points de contact des côtés avec (Q), et par B'_1, B'_2, ..., B'_n les points de contact avec (Q'). Soit (Q_1) la quadrique homofocale à (Q) et (Q'), qui passe par le point A_1 et qui appartient aux tangentes communes $A_1 A_2$ et $A_1 A_n$. Soient (Q_2), ..., (Q_n) les quadriques analogues passant respectivement par les points A_2, ..., A_n.

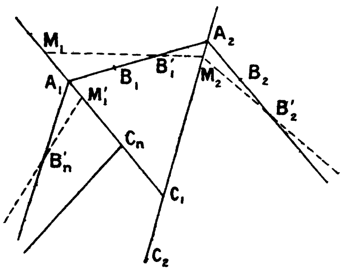
Déplaçons infiniment peu et d'une façon quelconque le point A_1 sur la quadrique (Q_1). Soit M_1 sa nouvelle position. Les points A_2, A_3, ..., A_n éprouvent, par suite de ce déplacement, des déplacements infiniment petits sur les quadriques correspondantes et viennent respectivement en M_2, M_3, ..., M_n. Le dernier côté du polygone, $A_n A_1$, devient $M_n M'_1$, M'_1 étant infiniment voisin de A_1. Nous allons chercher la relation qui existe entre M_1 et M'_1.

Remarquons tout d'abord que les plans tangents menés aux quadriques (Q) et (Q') par les côtés successifs du polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ ont leurs traces sur les plans tangents aux quadriques (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n) confondus deux à deux. Par exemple, les plans tangents menés à (Q) par $A_1 A_2$ et $A_2 A_3$ (plans dont B_1 et B_2 sont les points de contact) ont même trace sur le plan tangent à (Q_2) au point A_2. En effet, $A_1 A_2$ et $A_2 A_3$ sont sur le cône (S), circonscrit à (Q) et de sommet A_2, deux génératrices symétriques par rapport à l'un des axes principaux de ce cône. Les plans tangents à (S), c'est-à-dire à (Q), menés par $A_1 A_2$ et $A_2 A_3$ sont aussi symétriques par rapport à cet axe, et par suite ont leurs traces sur le plan principal perpendiculaire confondues : or ce plan principal n'est autre que le plan tangent à (Q_2), d'après la manière dont cette quadrique a été choisie.

Les traces des plans tangents à (Q) aux points B_1, B_2, ..., B_n sur les plans tangents respectivement à (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n), aux points A_1, A_2, ..., A_n, forment donc un polygone $C_n C_1 C_2 \ldots C_{n-1}$, qui donne lieu, ainsi qu'on l'a vu, à la relation (3) écrite plus haut.

Supposons maintenant que le déplacement infiniment petit $A_1 M_1$ donné au point A_1 soit dirigé suivant $C_n C_1$ (*fig.* 2). Il résulte de propriétés classiques que $A_1 A_2$ engendre alors un élément de surface développable dont le point central est le point B'_1. Le déplacement correspondant $A_2 M_2$ du second sommet A_2 du polygone est dirigé suivant $C_1 C_2$. Mais cette dernière droite est, comme on vient de le voir, dans le plan tangent à (Q) au point B_2. $A_2 A_3$ va donc encore engendrer un élément de surface développable, ayant pour point central le point B'_2, et ainsi de suite. Ainsi le fait que le premier côté du polygone engendre un élément de surface développable entraîne la même propriété pour tous les côtés suivants [1].

Fig. 2.



Il résulte de là que le point A_1 ayant reçu le déplacement particulier A_1M_1 dont il s'agit, dirigé suivant C_nC_1, le point M'_1 sera aussi situé sur C_nC_1. Cherchons maintenant la relation qui existe entre les longueurs des segments A_1M_1 et $A_1M'_1$: le calcul est en tous points semblable à celui du numéro précédent.

M_1M_2 pouvant être considérée comme rencontrant A_1A_2 au point B'_1, on a, par le théorème des transversales,

$$\frac{M_1A_1}{M_1C_1}\,\frac{B'_1A_2}{B'_1A_1}\,\frac{M_2C_1}{M_2A_2}=1,$$

ou, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\frac{M_1A_1}{A_1C_1}\,\frac{B'_1A_2}{B'_1A_1}\,\frac{A_2C_1}{M_2A_2}=1,$$

ou encore

$$\frac{A_2M_2}{A_1M_1}=\frac{C_1A_2}{A_1C_1}\,\frac{B'_1A_2}{A_1B'_1}.$$

---

(1) M. Darboux fait cette remarque dans sa *Théorie des surfaces* (t. II, p 289).

De même

$$\frac{A_3 M_3}{A_2 M_2} = \frac{C_2 A_3}{A_2 C_2} \frac{B'_2 A_3}{A_2 B'_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{A_n M_n}{A_{n-1} M_{n-1}} = \frac{C_{n-1} A_n}{A_{n-1} C_{n-1}} \frac{B'_{n-1} A_n}{A_{n-1} B'_{n-1}},$$

$$\frac{A_1 M'_1}{A_n M_n} = \frac{C_n A_1}{A_n C_n} \frac{B'_n A_1}{A_n B'_n}.$$

En multipliant membre à membre les égalités précédentes, il vient, en tenant compte des relations (1) et (3),

$$\frac{A_1 M'_1}{A_1 M_1} = (-1)^n \varepsilon\varepsilon',$$

ε' étant égal à ± 1, suivant que le polygone $A_1 A_2 \dots A_n$ est régulièrement ou irrégulièrement circonscrit à la quadrique (Q').

De même, donnons au point A_1 le déplacement infiniment petit $A_1 N_1$ dirigé suivant la trace $A_1 C'_1$ du plan tangent à (Q') en B'_1 sur le plan tangent à (Q_1). L'extrémité du $n^{\text{ième}}$ côté du polygone viendra en N'_1, situé sur $A_1 N_1$ et tel que l'on ait

$$\frac{A_1 N'_1}{A_1 N_1} = (-1)^n \varepsilon\varepsilon'.$$

Donnons enfin à A_1 le déplacement infiniment petit quelconque $A_1 P_1$ dans le plan tangent à (Q_1). L'extrémité du $n^{\text{ième}}$ côté du polygone vient en P'_1. Rapportons les points P_1 et P'_1 aux axes $A_1 C_1$ et $A_1 C'_1$; soient u et v les coordonnées du premier point, u' et v' celles du second; u' et v' sont fonctions de u et v, et, comme ces dernières variables sont infiniment petites, on peut écrire

$$u' = Au + Bv,$$
$$v' = Cu + Dv,$$

A, B, C, D étant des coefficients que nous allons déterminer. A cet effet faisons $v = 0$; on doit alors avoir, comme on a vu,

$$u' = (-1)^n \varepsilon\varepsilon' u, \qquad v' = 0,$$

d'où l'on tire

$$A = (-1)^n \varepsilon\varepsilon', \qquad C = 0.$$

On trouve de même

$$B = 0, \qquad D = (-1)^n \varepsilon\varepsilon'.$$

On a donc

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} u' &= (-1)^n \varepsilon\varepsilon' u, \\ v' &= (-1)^n \varepsilon\varepsilon' v. \end{aligned} \right.$$

Distinguons maintenant deux cas :

1° On a

$$(-1)^n \varepsilon\varepsilon' = +1.$$

Les relations (5) sont alors

$$u' = u, \qquad v' = v.$$

Le point P'_1 est confondu avec le point P_1. Ainsi, lorsque l'on donne au premier sommet du polygone un déplacement infiniment petit quelconque dans le plan tangent à (Q_1), l'extrémité du dernier côté ne cesse pas d'être en coïncidence avec ce premier sommet. On peut ensuite donner à ce même premier sommet un nouveau déplacement infiniment petit, sans que le polygone cesse d'être fermé, et ainsi de suite. On voit donc qu'il existe une infinité de polygones de n côtés circonscrits à (Q) et (Q') et ayant leurs sommets sur les quadriques (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n), l'un des sommets pouvant occuper une position arbitraire sur la quadrique correspondante.

2° On a

$$(-1)^n \varepsilon\varepsilon' = -1.$$

Les relations (5) sont alors

$$u' = -u, \qquad v' = -v,$$

et le point P'_1 est symétrique du point P_1 par rapport à A_1. Ainsi, quand on déplace arbitrairement le premier sommet du polygone, celui-ci cesse d'être fermé. Mais menons du point P'_1 une tangente commune à (Q) et (Q'), rencontrant le plan tangent à (Q_2) en un point P'_2 infiniment voisin du point P_2, et ainsi de suite. On arrivera finalement à un point P'_n infiniment voisin du point P_n et à un point P''_1, dont les coordonnées satisfont aux relations

$$u'' = -u' = u, \qquad v'' = -v' = v.$$

Le point P''_1 est confondu avec le point P_1, et l'on a construit un polygone fermé de $2n$ côtés, circonscrit aux quadriques (Q) et (Q') et ayant ses sommets opposés situés deux à deux sur les quadriques (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n).

Ce polygone est régulièrement circonscrit à chacune des quadriques (Q) et (Q'). En effet, les deux côtés opposés $P_i P_{i+1}$ et $P'_i P'_{i+1}$ touchent (Q), par exemple, en deux points β_i et β'_i infiniment voisins. Les deux rapports $\frac{P_i \beta_i}{\beta_i P_{i+1}}$ et $\frac{P'_i \beta'_i}{\beta'_i P'_{i+1}}$ sont donc de même signe, et le produit $\prod \frac{P_i \beta_i}{\beta_i P_{i+1}}$ étendu à tout le polygone a bien le signe $+$.

Ce polygone satisfait donc à la condition examinée dans le premier cas : le produit analogue à $(-1)^n \varepsilon\varepsilon'$ est pour lui égal à $+1$. On pourra donc construire une infinité de polygones de 2^n côtés circonscrits à (Q) et (Φ') et ayant leurs sommets opposés situés deux à deux sur (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n).

En résumant les résultats de l'analyse précédente, nous parvenons à ce théorème :

Soient (Q) *et* (Q') *deux quadriques homofocales,* II *un polygone de* n *côtés circonscrit à la fois à* (Q)

et à (Q'), ε *un nombre égal à* $+1$ *ou à* -1 *suivant que* Π *est régulièrement ou irrégulièrement circonscrit à* (Q), ε' *un nombre analogue relatif à* (Q'). *Soient* (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n) *n quadriques homofocales aux deux premières, passant respectivement par les sommets du polygone* Π, *chaque quadrique appartenant aux deux côtés qui se croisent au sommet correspondant. Cela posé :*

1° *Si le produit* $(-1)^n\varepsilon\varepsilon'$ *est égal à* $+1$, *il existe une infinité de polygones de n côtés circonscrits à* (Q) *et* (Q') *et ayant leurs sommets respectivement sur* (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n), *l'un des sommets pouvant être pris arbitrairement sur la quadrique correspondante.*

2° *Si le produit* $(-1)^n\varepsilon\varepsilon'$ *est égal à* -1, *il existe une infinité de polygones de* $2n$ *côtés circonscrits à* (Q) *et* (Q') *et ayant leurs sommets opposés situés deux à deux sur* (Q_1), (Q_2), ..., (Q_n). *Le polygone de n côtés d'où l'on est parti doit être considéré comme un polygone de* $2n$ *côtés dont les sommets opposés sont confondus deux à deux.*

Par exemple, coupons les deux quadriques (Q) et (Q') par un plan quelconque. Soient C et C' les deux coniques d'intersection ; construisons un triangle circonscrit à la fois à C et C' : ce triangle est régulièrement circonscrit à chacune des quadriques (car un triangle ne peut être irrégulièrement circonscrit à une quadrique que si les points de contact des côtés sont en ligne droite, et cela exige que la quadrique soit un cône). Par conséquent, le produit $(-1)^n\varepsilon\varepsilon'$ est ici égal à -1, et, si l'on considère les quadriques (Q_1), (Q_2), (Q_3) passant par les trois sommets du triangle, il existe une infinité d'*hexagones* ayant leurs sommets opposés situés deux à deux sur ces trois quadriques et circonscrits à (Φ) et

(Φ'). Le triangle d'où l'on est parti doit être considéré comme un tel hexagone ayant ses sommets opposés confondus.

4. Il va sans dire que le théorème démontré, étant d'une nature essentiellement projective, s'étend à des quadriques faisant partie d'un faisceau tangentiel. Il faut seulement, (Q) et (Q') étant deux quadriques du faisceau, définir ce qu'il faut entendre par quadrique du même faisceau passant par un point M et *appartenant* à un couple donné de tangentes communes à (Q) et (Q') issues du point M.

Soient (S) et (S') les deux cônes de sommet M circonscrits à (Q) et (Q'). Les quatre génératrices communes à ces deux cônes, MT_1, MT_2, MT_3 et MT_4, sont les tangentes communes à (Q) et (Q') issues du point M. Considérons deux de ces tangentes, MT_1 et MT_2 par exemple. Le pôle de leur plan par rapport à chacune des quadriques (Q) et (Q') est dans le plan tangent à l'une des trois quadriques du faisceau qui passent par M. Cette quadrique, ainsi parfaitement déterminée, sera dite appartenir au système des deux tangentes MT_1 et MT_2.

Dans le cas où le faisceau tangentiel considéré est un système de quadriques homofocales, on se rend compte immédiatement de l'identité de la nouvelle définition avec celle qui a été donnée plus haut.

Remarquons que la démonstration du théorème aurait pu être donnée sans modification pour le cas général où les quadriques considérées appartiennent à un faisceau tangentiel quelconque : en effet, nous n'avons fait intervenir aucune des propriétés métriques spéciales aux quadriques homofocales.