NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. FRÉCHET

Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées (suite)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 289-317

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__289_0>

[Q1a]

ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A UNE INFINITÉ DE COORDONNÉES

(SUITE);

PAR M. M. FRÉCHET.

Nous avons montré dans notre premier article (¹) comment on pouvait étendre les définitions de la Géométrie à un espace Ω ainsi défini : chaque point x de cet espace est déterminé par une infinité de coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ qui sont des nombres réels quelconques tels que la série

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \ldots$$

soit convergente.

Deux points coïncident si leurs coordonnées sont respectivement égales. La distance de deux points $(x_1, x_2, \ldots)$ et $(y_1, y_2, \ldots)$ est la racine carrée de la somme de la série convergente

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 + \ldots.$$

En utilisant les définitions de M. Padoa, on trouve que la droite qui passe par les points distincts a, b est l'ensemble des points

$$x = ra + sb$$

(où r et s sont deux nombres réels tels que $r + s = 1$), c'est-à-dire dont les coordonnées sont

$$x_i = ra_i + sb_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

(¹) *Voir* ce même Recueil, mars 1908, p. 97.

De même, le plan déterminé par les points non en ligne droite a, b, c est l'ensemble des points

$$x = ra + sb + tc,$$

où r, s, t sont trois nombres réels tels que l'on ait

$$r + s + t = 1.$$

Définition d'un hyperplan. — En généralisant la méthode de M. Padoa, on est amené naturellement à la définition suivante :

Soient a, b, c, d quatre points non dans un même plan. *Nous appellerons* hyperplan $abcd$ *l'ensemble des points x tels qu'il n'existe aucun point y distinct de x vérifiant simultanément les conditions*

$$(7) \qquad \begin{cases} (y, a) = (x, a), & (y, b) = (x, b) \\ (y, c) = (x, c), & (y, d) = (x, d). \end{cases}$$

Nous allons montrer que l'hyperplan $abcd$ existe et qu'il coïncide avec l'ensemble E des points x dont les coordonnées peuvent s'écrire sous la forme

$$x_i = ra_i + sb_i + tc_i + ud_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

où r, s, t, u sont quatre nombres réels tels que

$$r + s + t + u = 1.$$

D'abord l'hyperplan $abcd$ existe, c'est-à-dire qu'il comprend au moins un point, par exemple le point a, et de même les points b, c, d.

Tout point x de E est dans l'hyperplan, car, pour un tel point, on voit facilement qu'on a

$$r[(y, a)^2 - (x, a)^2] + s[(y, b)^2 - (x, b)^2] \\ + t[(y, c)^2 - (x, c)^2] + u[(y, d)^2 - (x, d)^2] = (x, y)^2,$$

quel que soit le point y. Donc, si $y \neq x$, il est impossible que chacun des crochets soit nul.

Réciproquement, tout point de l'hyperplan est un point de E.

Il revient au même de prouver que, si x n'est pas dans E, on peut trouver un point $y \neq x$ tel que les conditions (7) soient remplies. Pour cela admettons qu'on ait pu trouver un point h de E dont les coordonnées $h_1, h_2, \ldots$ vérifient les conditions

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \sum(h_i - a_i)(h_i - x_i) &= \sum(h_i - b_i)(h_i - x_i) \\ &= \sum(h_i - c_i)(h_i - x_i) \\ &= \sum(h_i - d_i)(h_i - x_i) = 0 \\ &(i = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right.$$

et prenons pour y

$$y = 2h - x.$$

Le point y ne peut coïncider avec x, puisque alors h qui est dans E coïnciderait avec x qui n'y est pas. On voit facilement que l'on aura

$$\begin{aligned} (y, a)^2 - (x, a)^2 &= \sum(y_i + x_i - 2a_i)(y_i - x_i) \\ &= 4\sum(h_i - a_i)(h_i - x_i) = 0. \end{aligned}$$

On a bien pour le point y

$$(y, a) = (x, a)$$

et de même

$$(y, b) = (x, b), \qquad (y, c) = (x, c), \qquad (y, d) = y, d.$$

Démontrons maintenant l'existence du point h. Il suffit de prendre

$$h_i = d_i + r(a_i - d_i) + s(b_i - d_i) + t(c_i - d_i) \quad (i = 1, 2 \ldots)$$

et de déterminer r, s, t de façon qu'on ait

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum (h_i - x_i)(a_i - d_i) &= \sum (h_i - x_i)(b_i - d_i) \\ &= \sum (h_i - x_i)(c_i - d_i) = 0. \end{aligned} \right.$$

Car on aura

$$\begin{aligned} \sum (h_i - a_i)(h_i - x_i) = (r - 1) &\sum (h_i - x_i)(a_i - d_i) \\ + s &\sum (h_i - x_i)(b_i - d_i) \\ + t &\sum (h_i - x_i)(c_i - d_i) = 0, \end{aligned}$$

et, en permutant a, b, c, d, on retrouve les conditions (8).

Or, pour satisfaire aux nouvelles conditions (9), il suffit de prendre pour r, s, t un système de solutions des équations obtenues en remplaçant dans (9) h par son expression, soient

$$\begin{aligned} & r\left[\sum (a_i - d_i)^2\right] + s\left[\sum (b_i - d_i)(a_i - d_i)\right] \\ & + t\left[\sum (c_i - d_i)(a_i - d_i)\right] + \left[\sum (d_i - x_i)(a_i - d_i)\right] = 0, \\ & r\left[\sum (a_i - d_i)(b_i - d_i)\right] + s\left[\sum (b_i - d_i)^2\right] \\ & + t\left[\sum (c_i - d_i)(b_i - d_i)\right] + \left[\sum (d_i - x_i)(b_i - d_i)\right] = 0, \\ & r\left[\sum (a_i - d_i)(c_i - d_i)\right] + s\left[\sum (b_i - d_i)(c_i - d_i)\right] \\ & + t\left[\sum (c_i - d_i)^2\right] + \left[\sum (d_i - x_i)(c_i - d_i)\right] = 0. \end{aligned}$$

Le théorème sera démontré si nous prouvons qu'on peut résoudre ces équations. Nous allons faire voir pour cela que, les points a, b, c, d n'étant pas dans le même plan, le déterminant Δ des coefficients de r, s, t est différent de zéro. Or, ce déterminant Δ est la limite pour n infini du déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \sum_1^n (a_i - d_i)^2 & \sum_1^n (b_i - d_i)(a_i - d_i) & \sum_1^n (c_i - d_i)(a_i - d_i) \\ \sum_1^n (a_i - d_i)(b_i - d_i) & \sum_1^n (b_i - d_i)^2 & \sum_1^n (c_i - d_i)(b_i - d_i) \\ \sum_1^n (a_i - d_i)(c_i - d_i) & \sum_1^n (b_i - d_i)(c_i - d_i) & \sum_1^n (c_i - d_i)^2 \end{vmatrix}.$$

D'après la règle de multiplication des matrices, on sait que Δ_n peut encore s'écrire

$$\Delta_n = \sum_1^n [D_{i,j,k}]^2$$

avec

$$D_{i,j,k} = \begin{vmatrix} a_i - d_i & a_j - d_j & a_k - d_k \\ b_i - d_i & b_j - d_j & b_k - d_k \\ c_i - d_i & c_j - d_j & c_k - d_k \end{vmatrix},$$

où l'on prend pour i, j, k successivement toutes les combinaisons possibles des nombres 1, 2, ..., n trois à trois.

On a donc

$$0 \leqq [D_{i,j,k}]^2 \leqq \Delta_n$$

et

$$0 \leqq \Delta_n \leqq \Delta.$$

Si Δ était nul, on aurait $D_{i,j,k} = 0$, quels que soient i, j, k; on pourrait alors trouver trois nombres u, v, w

non tous nuls tels que l'on ait, quel que soit i,

$$u(a_i - d_i) + v(b_i - d_i) + w(c_i - d_i) = 0$$

ou

$$d_i = \frac{u a_i + v b_i + w c_i}{u + v + w},$$

c'est-à-dire que les points a, b, c, d seraient dans un même plan contrairement à notre hypothèse. Ainsi, il est démontré qu'un hyperplan $abcd$ est l'ensemble des points x dont les coordonnées sont de la forme

$$x_i = d_i + \lambda(a_i - d_i) + \mu(b_i - d_i) + \nu(c_i - d_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots).$$

Chaque point de cet hyperplan est déterminé par les trois nombres réels indépendants λ, μ, ν et varie de manière continue avec ceux-ci. De sorte que *cet hyperplan est un espace à trois dimensions*. Nous allons montrer que *cet espace jouit de propriétés entièrement analogues à celles de l'espace ordinaire, c'est-à-dire de l'espace euclidien*. Autrement dit, nous allons prouver qu'on peut faire correspondre point par point un hyperplan quelconque et l'espace euclidien, de façon que les figures correspondantes aient le même nom et que les longueurs correspondantes soient égales.

Pour cela, montrons d'abord que l'on peut toujours trouver dans un hyperplan trois droites concourantes rectangulaires deux à deux. En effet, soit l'hyperplan $abcd$. Prenons ab pour l'une des droites cherchées ; on pourra, d'une infinité de manières, déterminer un point de l'hyperplan

$$b' = d + \lambda'(a - d) + \mu'(b - d) + \nu'(c - d),$$

tel que db' soit perpendiculaire à da. Il suffit que l'on ait

$$0 = \sum (a_i - d_i)(b'_i - d_i)$$
$$= \lambda' \sum (a_i - d_i)^2$$
$$+ \mu' \sum (b_i - d_i)(a_i - d_i) + \nu' \sum (c_i - d_i)(a_i - d_i).$$

Ceci fait, on pourra encore choisir un point c' de l'hyperplan tel que dc' soit perpendiculaire à da et db'. Il suffit de prendre

$$c' = d + \lambda''(a - d) + \mu''(b' - d) + \nu''(c = d),$$

avec

$$0 = \sum (a_i - d_i)(c'_i - d_i) = \lambda'' \sum (a_i - d_i)^2 + \nu'' \sum (a_i - d_i)(c_i - d_i),$$
$$0 = \sum (b'_i - d_i)(c'_i - d_i) = \mu'' \sum (b'_i - d_i)^2 + \nu'' \sum (b'_i - d_i)(c_i - d_i),$$

et l'on pourra toujours tirer λ'' et μ'' de ces deux relations.

En définitive, on voit qu'en remplaçant au besoin b et c par b' et c', on pourra toujours supposer l'hyperplan défini par quatre points a, b, c, d tels que les droites da, db, dc soient rectangulaires deux à deux.

Écrivons alors les coordonnées d'un point x quelconque de l'hyperplan $abcd$ sous la forme

$$x_i = d_i + X\alpha_i + Y\beta_i + Z\gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

en posant

$$\alpha_i = \frac{a_i - d_i}{(a, d)}, \qquad \beta_i = \frac{b_i - d_i}{(b, d)}, \qquad \gamma_i = \frac{c_i - d_i}{(c, d)}.$$

Si x' est un autre point de l'hyperplan, de coordonnées

$$x'_i = d_i + X' d_i + Y' \beta_i + Z' \gamma_i,$$

on aura, puisque *ad, bd, cd* sont rectangulaires,

$$(x, x') = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2}.$$

On voit maintenant que, si l'on se donne dans l'espace euclidien trois axes de coordonnées rectangulaires, on pourra faire correspondre à tout point x de l'hyperplan *abcd* un point P de cet espace ayant X, Y, Z pour coordonnées rectangulaires, et réciproquement. De plus, cette correspondance uniforme et réciproque est une *application* de ces deux espaces en ce sens que les distances de deux points correspondants sont conservées.

Alors nous voyons qu'à un point de l'hyperplan correspond un point de l'espace euclidien et cela de telle manière que, si deux couples de points de l'hyperplan sont superposables (c'est-à-dire si leurs distances sont égales), les deux couples correspondants de l'espace euclidien sont superposables. Comme, d'une part, les seuls symboles non définis de M. Padoa sont *point* et *couples superposables,* et que, d'autre part, ses définitions appliquées au cas de l'espace euclidien conduisent à la géométrie ordinaire, nous pouvons en conclure que les figures correspondantes de l'hyperplan et de l'espace euclidien porteront le même nom.

En d'autres termes, *la géométrie de l'hyperplan est identique à la géométrie euclidienne.*

Il y aura toutefois lieu de n'appeler *sphère* dans un hyperplan que la partie d'une sphère de l'espace Ω qui est située dans cet hyperplan, de même qu'on appelle *cercle* la partie d'une sphère située dans un plan.

En généralisant la méthode précédente, on verrait que la géométrie de l'espace à n dimensions telle qu'elle est habituellement développée est identique à la géométrie dans l'ensemble des points x de l'espace Ω, tels que leurs coordonnées soient de la forme

$$x_i = \alpha^{(1)} a_i^{(1)} + \alpha^{(2)} a_i^{(2)} + \ldots + \alpha^{(n+1)} a_i^{(n+1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

où $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n+1)}$ sont des nombres réels assujettis seulement à la condition

$$\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \ldots + \alpha^{(n+1)} = 1,$$

et où $a^{(1)}, \ldots, a^{(n+1)}$ sont $n+1$ points dont les coordonnées ne vérifient pas une relation linéaire et homogène à coefficients constants non tous nuls, telle que

$$\beta^{(1)} a_i^{(1)} + \beta^{(2)} a_i^{(2)} + \ldots + \beta^{(n+1)} a_i^{(n+1)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Application de l'espace Ω sur lui-même. — Nous allons chercher maintenant à déterminer l'*application* la plus générale de l'espace Ω sur lui-même. Nous appellerons ainsi une transformation ponctuelle uniforme de l'espace Ω telle que la distance de deux points quelconques soit conservée dans la transformation. Une telle correspondance sera, en particulier, une transformation continue, puisque, si la distance d'un point M_p à un point fixe M tend vers zéro, la distance du point M'_p correspondant à M_p, au point M' correspondant à M, tendra aussi vers zéro.

Nous allons démontrer que *l'application la plus générale de Ω sur lui-même se représente analytiquement par la transformation orthogonale la plus générale, suivie de la translation la plus générale.*

Appelons Tx le point correspondant à x dans une application de Ω sur lui-même, en sorte que ses coordonnées seront

$$T_1 x, \quad T_2 x, \quad \ldots, \quad T_n x, \quad \ldots.$$

Il faudra que, quels que soient les points x et y de Ω, on ait

$$(Tx, Ty) = (x, y).$$

En particulier, quels que soient λ λ', on aura

$$\left(T\frac{x+\lambda y}{1+\lambda}, T\frac{x+\lambda' y}{1+\lambda'}\right) = \left(\frac{x+\lambda y}{1+\lambda}, \frac{x+\lambda' y}{1+\lambda'}\right).$$

Cette dernière quantité, d'après la définition de la distance, est identiquement égale à

$$\left|\frac{\lambda'-\lambda}{(1+\lambda)(1+\lambda')}\right|(x, y).$$

On aura donc

$$\left(T\frac{x+\lambda y}{1+\lambda}, T\frac{x+\lambda' y}{1+\lambda'}\right) = \left(\frac{Tx+\lambda Ty}{1+\lambda}, \frac{Tx+\lambda' Ty}{1+\lambda'}\right).$$

En particulier, en posant $z \equiv x + \lambda y$,

$$(Tz, Tx) = \left(\frac{Tx+\lambda Ty}{1+\lambda}, Tx\right) = \left|\frac{\lambda}{1+\lambda}\right|(Tx, Ty),$$

$$(Tz, Ty) = \left(\frac{Tx+\lambda Ty}{1+\lambda}, Ty\right) = \left|\frac{1}{1+\lambda}\right|(Tx, Ty).$$

En ajoutant ou retranchant, on a

$$\pm(Tz, Tx) \pm (Tz, Ty) = (Tx, Ty).$$

Or, nous avons vu (¹) que cette égalité n'a lieu que si z est sur la droite qui joint les points Tx, Ty. Alors

$$Tz \equiv \frac{Tx+\mu Ty}{1+\mu},$$

et l'on a

$$(Tz, Tx) = \left|\frac{\mu}{1+\mu}\right|(Tx, Ty),$$

$$(Tz, Ty) = \left|\frac{1}{1+\mu}\right|(Tx, Ty).$$

(¹) Article précédent, p. 104.

D'où, en comparant avec les expressions précédemment obtenues,

$$\left|\frac{\lambda}{1+\lambda}\right| = \left|\frac{\mu}{1+\mu}\right|, \qquad \left|\frac{1}{1+\lambda}\right| = \left|\frac{1}{1+\mu}\right|,$$

ce qui donne $\lambda = \mu$ et, par suite,

$$\mathrm{T}\frac{x+\lambda y}{1+\lambda} = \frac{\mathrm{T}x+\lambda\mathrm{T}y}{1+\lambda},$$

quels que soient le nombre λ et les points x, y.

Ainsi, *toute droite se transforme en une droite.*

Pour simplifier, nous allons maintenant réduire $\mathrm{T}x$ à une forme plus simple. Posons

$$\mathrm{T}_0 = \alpha \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}x = \mathrm{T}x - \alpha.$$

On aura

$$\mathrm{U}_0 \equiv 0, \qquad (\mathrm{U}x, \mathrm{U}y) = (x, y);$$

on est ramené au cas d'une application qui laisse l'origine fixe. On aura encore

$$\mathrm{U}\frac{x+\lambda y}{1+\lambda} \equiv \frac{\mathrm{U}x+\lambda\mathrm{U}y}{1+\lambda}. \tag{10}$$

En particulier, pour $y \equiv 0$ et $\lambda = \frac{1}{\rho} - 1$,

$$\mathrm{U}\rho x \equiv \rho\mathrm{U}x, \tag{11}$$

ceci ayant lieu quel que soit ρ. L'égalité (10) devient donc

$$\mathrm{U}(x+\lambda y) \equiv \mathrm{U}x + \lambda\mathrm{U}y,$$

et pour $\lambda = 1$

$$\mathrm{U}(x+y) \equiv \mathrm{U}x + \mathrm{U}y. \tag{12}$$

D'une manière générale, on tire de (11) et (12) l'identité

$$\mathrm{U}(\lambda x+\mu y+\nu z+\rho t+\ldots) \equiv \lambda\mathrm{U}x+\mu\mathrm{U}y+\nu\mathrm{U}z+\ldots, \tag{13}$$

quels que soient les quantités λ, μ, ν, ρ, ... et les points x, y, z, t, ... en nombre fini.

De cette identité fondamentale on peut maintenant conclure que les coordonnées de Tx sont des fonctions linéaires de celles de x. En effet, on en tire d'abord

$$(14) \quad \begin{cases} Ux^{(k)} \equiv x_1 U_{1,0,0} + \ldots + x_2 U_{0,1,0,0} + \ldots + x_k U_{0,0,\ldots,1,0,0,\ldots} \\ \qquad \equiv a^{(1)} x_1 + a^{(2)} x_2 + \ldots + a^{(k)} x_k, \end{cases}$$

$a^{(1)}$, ..., $a^{(k)}$ étant des points bien déterminés par la transformation U et $x^{(k)}$ le point de coordonnées x_1, x_2, ..., $x_{k,0,0,\ldots}$.

D'autre part, si x est le point de coordonnées x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., on a

$$(Ux, Ux^{(k)}) = (x, x^{(k)}) = \sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots}.$$

Alors

$$\begin{aligned} |U_h x - U_h x^{(k)}| &\leqq \sqrt{[U_1 x - U_1 x^{(k)}]^2 + [U_2 x - U_2 x^{(k)}]^2 + \ldots} \\ &= [Ux, Ux^{(k)}] = \sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots}. \end{aligned}$$

Lorsque h est fixe et k croît indéfiniment, on voit qu'on aura

$$(15) \qquad U_h x = \lim U_h x^{(k)}.$$

En combinant les égalités (14) et (15), on en conclut :

1° Que la série

$$U_h x = a_h^{(1)} x_1 + \ldots + a_h^{(k)} x_k + \ldots$$

est convergente quel que soit h ;

2° Que l'on a

$$Tx = \alpha + a^{(1)} x_1 + a^{(2)} x_2 + \ldots + a^{(k)} x_k + \ldots$$

avec

$$\alpha \equiv To, \quad a^{(1)} \equiv Ti^{(1)} - To, \quad \ldots, \quad a^{(k)} = Ti^{(k)} - To, \quad \ldots,$$

$i^{(k)}$ désignant le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la $k^{\text{ième}}$ qui est égale à 1.

Ainsi Tx est une transformation linéaire déterminée; mais cela ne suffit pas encore, les coefficients ne sont pas quelconques.

On a, en effet,

$$(a^{(k)}, o) = (U i^{(k)}, U o) = (i^{(k)}, o) = 1,$$
$$(a^{(k)}, a^{(k')}) = (U i^{(k)}, U i^{(k')}) = (i^{(k)}, i^{(k')}) = 2 \qquad \text{si } k \neq k'.$$

Or, on a

$$(a^k, o)^2 = [a_1^{(k)}]^2 + [a_2^{(k)}]^2 + \ldots,$$
$$\begin{aligned}(a^{(k)}, a^{(k')})^2 &= [a_1^{(k)} - a_1^{(k')}]^2 + \ldots \\ &= [a_1^{(k)}]^2 + [a_2^{(k)}]^2 + \ldots + [a_1^{(k')}]^2 + [a_2^{(k')}]^2 + \ldots \\ &\quad - 2[a_1^{(k)} a_1^{(k')} + a_2^{(k)} a_2^{(k')} + \ldots].\end{aligned}$$

On a donc en définitive

$$(16) \qquad a_1^{(k)} a_1^{(k')} + a_2^{(k)} a_2^{(k')} + \ldots = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq k', \\ 1 & \text{si} \quad k = k'. \end{cases}$$

Je dis maintenant que le système des nombres a_h^k est *complet*, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun point z de coordonnées z_1, z_2, ... tel que l'on ait

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots = 1, \qquad a_h^{(1)} z_1 + a_h^{(2)} z_2 + \ldots + a_h^{(k)} z_k + \ldots = 0$$

quel que soit h, z étant fixe. En effet, on aurait alors

$$Uz \equiv o.$$

Donc

$$1 = (z, o) = (Uz, Uo) = (o, o) = o.$$

Ainsi la transformation Tx peut se décomposer en deux :

1° Une transformation orthogonale complète,

$$Ux = a^{(1)} x_1 + a^{(2)} x_2 + a^{(3)} x_3 + \ldots,$$

c'est-à dire une transformation linéaire dont les coefficients forment un système complet satisfaisant aux conditions (16);

2° Une transformation de la forme

$$tX = X + \alpha$$

(où α est un point fixe) et que nous appellerons une *translation*. Réciproquement, le produit de deux telles transformations est une application de l'espace Ω sur lui-même. Il suffit de démontrer que les distances sont conservées. Or, ceci est évident pour la translation. En ce qui concerne la transformation orthogonale, M. Riesz a démontré [1] que, quels que soient les nombres $a_h^{(k)}$, pourvu qu'ils forment un système complet satisfaisant aux conditions (16), les équations linéaires

$$X_h = a_h^{(1)} x_1 + a_h^{(2)} x_2 + \ldots \tag{17}$$

admettent toujours, lorsque $\sum X_h^2$ converge, un système unique de solutions tel que $\sum x_k^2$ converge et donné par les formules

$$x_k = a_1^{(k)} X_1 + a_2^{(k)} X_2 + \ldots, \tag{18}$$

et l'on a de plus

$$\sum x_k^2 = \sum X_h^2. \tag{19}$$

De la dernière remarque on déduit que

$$(Ux', Ux'') = (x', x''),$$

quels que soient les points x', x''. En effet, on a

$$Ux' - Ux'' = U(x' - x'')$$

---

(1) *Sur les systèmes orthogonaux* (*Comptes rendus* du 18 mars 1907).

et alors il suffit d'appliquer l'égalité (19) à

$$x = x' - x''.$$

De plus, l'énoncé précédent montre que la transformation inverse est aussi uniforme. Enfin, lorsque X_1, X_2, ... sont tous nuls sauf $X_{h'} = 1$, les égalités (18) donnent

$$x_1 = a_{h'}^{(1)}, \qquad x_2 = a_{h'}^{(2)}, \qquad \ldots$$

et les égalités (17) donnent alors

$$a_h^{(1)} a_{h'}^{(1)} + a_h^{(2)} a_{h'}^{(2)} + \ldots = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad h = h', \\ 0 & \text{si} \quad h \neq h'. \end{cases}$$

Ensembles de points. — Nous avons observé que la quantité (a, b), définie pour deux points quelconques a, b, satisfait aux deux conditions suivantes :

1° $(a, b) = 0$, si a, b coïncident et seulement dans ce cas;

2° On a, quels que soient a, b, c,

$$(a, b) \leqq (a, c) + (c, b).$$

Elle jouit donc des propriétés qui nous ont servi à caractériser dans notre Thèse l'*écart* de deux éléments [1]. L'espace Ω forme donc une classe (E) [2].

On dira qu'une suite $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ... de points de Ω a une limite a, s'il existe un point a de Ω tel que $(a, a^{(n)})$ tende vers zéro quand n croît indéfiniment. Il est nécessaire pour cela que la coordonnée de $a^{(n)}$ d'un ordre déterminé tende vers la coordonnée de même rang de a, mais ce n'est pas suffisant.

---

(1) *Voir* ma Thèse : *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, p. 30. Paris, Hermann.

(2) *Loc. cit.*, p. 30.

Je dis maintenant que l'espace Ω forme une classe *normale* [1].

Il suffit pour cela de démontrer les deux propriétés suivantes :

1° On peut généraliser dans Ω le théorème de Cauchy sur la convergence d'une suite. Autrement dit, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de points de Ω, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ..., $a^{(n)}$, ..., ait une limite est que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un entier n tel que l'on ait, quel que soit l'entier p,

$$(a^{(n)}, a^{(n+p)}) < \varepsilon.$$

La condition est nécessaire; car, s'il y a une limite a, on aura, pour $q > n - 1$,

$$(a^{(q)}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par suite,

$$(a^{(n)}, a^{(n+p)}) \leqq (a^{(n)}, a) + (a^{(n+p)}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Réciproquement, si la condition est vérifiée, on a la même condition pour les coordonnées de rang déterminé i, puisque

$$|a_i^{(n)} - a_i^{(n+p)}| \leqq (a^{(n)}, a^{(n+p)}).$$

Donc, pour chaque valeur de i la suite $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, ..., $a_i^{(n)}$, ... est convergente. Soit a_i sa limite; il faut d'abord montrer que $\sum a_i^2$ converge. Or posons

$$\omega_i^{(n)} = a_i - a_i^{(n)}.$$

On a, quels que soient i et p,

$$[a_1^{(n)} - a_1^{(n+p)}]^2 + \ldots + [a_i^{(n)} - a_i^{(n+p)}]^2 \leqq (a^{(n)}, a^{(n+p)})^2 < \varepsilon^2.$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 23. La proposition actuelle a été énoncée sans démonstration par M. Riesz, *loc. cit.*, sous la forme qu'on obtient en prenant comme éléments, non des points, mais des fonctions.

Laissons i, n fixes et faisons croître p indéfiniment; on aura

$$(20) \qquad [a_1^{(n)} - a_1]^2 + \ldots + [a_i^{(n)} - a_i]^2 < \varepsilon^2;$$

donc

$$[\omega_1^{(n)}]^2 + \ldots + [\omega_i^{(n)}]^2 < \varepsilon^2$$

pour i quelconque.

Ainsi, la série

$$[\omega_1^{(n)}]^2 + \ldots + [\omega_i^{(n)}]^2 + \ldots$$

est convergente; il en est donc de même de la série

$$[\omega_1^{(n)} + a_1^{(n)}]^2 + \ldots + [\omega_i^{(n)} + a_i^{(n)}]^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire de la série

$$(a_1)^2 + \ldots + (a_n)^2 + \ldots.$$

La suite $a_1, a_2, \ldots$ définit bien un point de Ω. De plus, l'inégalité (20) ayant lieu quel que soit i, on a

$$(a^{(n)}, a) = \sqrt{[a_1^{(n)} - a_1]^2 + \ldots + [a_i^{(n)} - a_i]^2 + \ldots} < \varepsilon;$$

la suite $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$ a bien pour limite le point a.

2° La classe des points de Ω est *séparable*. Autrement dit, on peut trouver une suite infinie dénombrable S de points de Ω, $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}, \ldots$, telle que tout point de Ω puisse être considéré comme la limite d'une suite $A^{(p_1)}, A^{(p_2)}, \ldots, A^{(p_n)}, \ldots$ convenablement extraite de la suite S.

En effet, si l'on se donne une suite de q nombres *rationnels* d'un signe quelconque suivis d'une infinité de zéros,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_q, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad \ldots,$$

la somme de ses carrés est convergente; elle définit donc un certain point α de Ω. Je dis que l'on peut prendre pour suite $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... l'ensemble Σ de tous les points α obtenus en donnant à q toutes les valeurs possibles. Il est d'abord évident que tout point de Ω peut être considéré comme limite d'une suite extraite de Σ. En effet, quel que soit q et quel que soit le point a de Ω, je pourrai toujours choisir un point $\alpha^{(q)}$ de Σ, dont les coordonnées $\alpha_1^{(q)}, \ldots, \alpha_q^{(q)}, 0, \ldots$ vérifient les conditions

$$|a_1 - \alpha_1^{(q)}| < \frac{1}{q}, \qquad |a_2 - \alpha_2^{(q)}| < \frac{1}{2q}, \qquad \ldots,$$
$$|a_i - \alpha_i^{(q)}| < \frac{1}{iq}, \qquad \ldots, \qquad |a_q - \alpha_q^{(q)}| < \frac{1}{q^2},$$

d'où

$$(a, \alpha^{(q)})^2 < \frac{1}{q^2}\left[1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{i^2} + \ldots + \frac{1}{q^2}\right] + (a_{q+1})^2 + (a_{q+2})^2 + \ldots,$$

quantité infiniment petite lorsque q croît indéfiniment. Donc a est bien la limite d'une suite de points extraite de Σ :

$$\alpha^{(1)}, \quad \alpha^{(2)}, \quad \ldots, \quad \alpha^{(q)}, \quad \ldots.$$

Il faut encore montrer que l'on peut ranger *tous* les points de Σ en une suite infinie. En effet, appelons Σ_q l'ensemble des points de Σ dont toutes les coordonnées sont nulles à partir du rang $q+1$ inclusivement. Il est facile de voir qu'on peut ranger tous les nombres rationnels en une suite dénombrable [1]

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots.$$

Alors les coordonnées d'un point quelconque de Σ_q peuvent s'écrire sous la forme

$$c_{i_1}, \quad c_{i_2}, \quad \ldots, \quad c_{i_q}, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots.$$

---

(1) *Voir*, par exemple : BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 2.

Un point quelconque M de Σ_q est donc déterminé par q indices entiers; on peut le désigner sans ambiguïté par la notation $M_{i_1,\ldots,i_q}$; or on sait ([1]) que, dans ces conditions, l'ensemble Σ_q est dénombrable. Par suite, l'ensemble Σ qui est un ensemble dénombrable d'ensembles dénombrables de points est aussi un ensemble dénombrable de points. De sorte qu'on pourra ranger ses éléments en une suite infinie de points $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}, \ldots$.

Ensembles compacts. — Cherchons maintenant à quelles conditions un ensemble de points de Ω sera *compact, c'est-à-dire* tel qu'on puisse extraire de toute infinité de points de cet ensemble au moins une suite convergente. Si les points de Ω n'avaient qu'un nombre fini de dimensions, il suffirait que l'ensemble se trouve dans un domaine limité, c'est-à-dire que les coordonnées de ses points restent comprises entre des limites finies. Ici, la condition n'est plus suffisante. Or, si l'on veut généraliser la théorie des ensembles, la notion d'ensemble borné n'a plus aucune importance dès qu'elle ne coïncide plus avec celle d'ensemble compact. Il est donc essentiel de trouver la condition suffisante.

J'avais énoncé sans démonstration cette condition dans les *Comptes rendus*.

Pour qu'un ensemble E de points de Ω soit compact, il faut et il suffit :

1° Que les coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'un point de cet ensemble restent comprises entre deux nombres fixes, indépendants du point;

2° Que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 2.

entier n tel que l'on ait

$$(a_{n+1})^2+(a_{n+2})^2+\ldots+(a_{n+p})^2+\ldots<\varepsilon$$

pour tout point de l'ensemble, n gardant la même valeur.

On peut réunir ces deux conditions dans la suivante : *il faut et il suffit qu'il existe une suite de nombres fixes convergeant vers zéro,* $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots,$ *tels que l'on ait pour* tout *point de l'ensemble et quel que soit* n

$$(a_{n+1})^2+(a_{n+2})^2+\ldots+(a_{n+p})^2+\ldots\leqq(M_n)^2.$$

Démontrons d'abord que la condition est suffisante. Considérons une infinité I de points de l'ensemble E. Je dis que I possède au moins un élément limite. En effet, les coordonnées de rang 1 des points de I sont toutes comprises entre $-M_1$ et $+M_1$; on peut donc extraire de I une suite I_1 de points

$$a^{(1)},\quad a^{(2)},\quad a^{(3)},\quad \ldots$$

dont la suite des coordonnées de rang 1 est convergente. En procédant de même dans I_1, on formera une suite I_2 de points de I_1,

$$b^{(1)},\quad b^{(2)},\quad b^{(3)},\quad \ldots,$$

dont les coordonnées de rang 2 ont une limite. On formera de même une suite I_3 prise dans I_2,

$$c^{(1)},\quad c^{(2)},\quad c^{(3)},\quad \ldots,$$

dont les coordonnées de rang 3 ont une limite, etc. Alors la suite S de points

$$a^{(1)},\quad b^{(2)},\quad c^{(3)},\quad \ldots$$

sera extraite de I et ses coordonnées d'un rang déterminé p auront une limite α_p quel que soit p. Je dis que les nombres α_p peuvent être considérés comme les coordonnées d'un point α de Ω et que la suite S a pour limite α. En effet, désignons par $\lambda_1^{(n)}$, $\lambda_2^{(n)}$, ... les coordonnées du $n^{\text{ième}}$ point, $\lambda^{(n)}$, de la suite S. On a, quels que soient m, n et p,

$$[\lambda_{m+1}^{(n)}]^2 + [\lambda_{m+2}^{(n)}]^2 + \ldots + [\lambda_{m+p}^{(n)}]^2 \leqq (M_m)^2.$$

Si l'on fait croître n (m et p restant fixes), on aura

$$(\alpha_{m+1})^2 + (\alpha_{m+2})^2 + \ldots + (\alpha_{m+p})^2 \leqq (M_m)^2,$$

quels que soient m et p; donc, quand p croît, le premier membre croît (ou ne décroît pas) en restant borné. Par suite, la série

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2 + \ldots$$

est convergente et l'on a même, quel que soit m,

$$(\alpha_{m+1})^2 + \ldots + (\alpha_{m+p})^2 + \ldots \leqq (M_m)^2.$$

Ainsi α_1, α_2, ... sont les coordonnées d'un point α de Ω. De plus, on a toujours, quel que soit n,

$$\begin{aligned}&[\alpha_{m+1} - \lambda_{m+1}^{(n)}]^2 + [\alpha_{m+2} - \lambda_{m+2}^{(n)}]^2 + \ldots \\ &\quad \leqq 2([\alpha_{m+1}]^2 + [\lambda_{m+1}^{(n)}]^2 + (\alpha_{m+2})^2 + [\lambda_{m+2}^{(n)}]^2 + \ldots) \leqq 4M_m^2.\end{aligned}$$

Soit alors ε un nombre donné; on pourra prendre m assez grand pour que $4M_m^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$; m étant ainsi *fixé*, on pourra choisir un nombre q tel que l'inégalité $n > q$ entraîne

$$|\alpha_1 - \lambda_1^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2m}, \qquad \ldots, \qquad |\alpha_m - \lambda_m^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

On aura donc, pour $n > q$,

$$\begin{aligned}(\alpha, \lambda^{(n)})^2 &= [\alpha_1 - \lambda_1^{(n)}]^2 + \ldots + [\alpha_m - \lambda_m^{(n)}]^2 \\ &\quad + ([\alpha_{m+1} - \lambda_{m+1}^{(n)}]^2 + \ldots) \leqq m\frac{\varepsilon^2}{4m^2} + \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Ainsi la suite $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, ... extraite de I tend vers un certain point α de Ω.

Prouvons maintenant que la condition est nécessaire.

Je dis d'abord que les coordonnées d'un rang déterminé quelconque des points d'un ensemble compact E ont une limite supérieure pour chaque valeur de ce rang. En effet, dans le cas contraire, il y aurait un rang p tel qu'on puisse extraire de E une suite S de points $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ... dont les coordonnées de rang p croissent indéfiniment. Alors, il serait manifestement impossible d'extraire de S une suite de points ayant une limite.

Montrons ensuite que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n tel qu'on ait pour tout point $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ de E

$$(a_{n+1})^2 + (a_{n+2})^2 + \ldots \leqq \varepsilon.$$

En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver une valeur de ε et une suite de points $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ... de E tels qu'on ait

$$(21) \qquad (a_n^{(n)})^2 + (a_{n+1}^{(n)})^2 + (a_{n+2}^{(n)})^2 + \ldots > \varepsilon,$$

quel que soit n, et, comme l'ensemble est supposé compact, on peut admettre que cette suite est convergente en la remplaçant au besoin par une suite convenablement extraite d'elle-même. Soient alors $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ les coordonnées du point limite; on pourra prendre q assez grand pour qu'on ait

$$(a^{(n)}, \alpha) < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \qquad \text{et} \qquad (\alpha_n)^2 + (\alpha_{n+1})^2 + \ldots < \frac{\varepsilon}{4}$$

pour $n > q$.

Alors

$$\begin{aligned} &[a_n^{(n)}]^2 + [a_{n+1}^{(n)}]^2 + \ldots + \ldots \\ &\quad \leqq 2\{(\alpha_n)^2 + (\alpha_{n+1})^2 + \ldots + [a_n^{(n)} - \alpha_n]^2 + [a_{n+1}^{(n)} - \alpha_{n+1}]^2 + \ldots\} \\ &\quad \leqq 2\frac{\varepsilon}{4} + 2(a^{(n)}, \alpha)^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

contrairement à l'inégalité (21).

Au moyen des théorèmes précédents, on peut appliquer à l'espace Ω les résultats généraux de ma Thèse et démontrer par exemple que *tout ensemble fermé de points de* Ω *est la somme d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait ou nul sans éléments communs* (1). De même aussi, *pour que de toute famille* F (*dénombrable ou non*) *d'ensembles* I *tels que tout point d'un ensemble déterminé* E *de points de* Ω *soit intérieur au sens étroit à au moins l'un d'eux, on puisse extraire un nombre fini d'ensembles* I *formant une famille* G *jouissant de la même propriété que* H, *il faut et il suffit que* E *soit un ensemble compact* (2) *et fermé* (3).

Appelons aussi *fonction de points de* Ω une fonction dont la valeur est déterminée en chaque point de Ω. Nous pourrons dire que la fonction $F(x)$ est continue pour $x = a$ si $F(x)$ tend vers $F(a)$ quand x tend vers a.

Alors *toute fonction continue dans un ensemble compact et fermé de points de* Ω *y atteint son maximum* (4).

Et aussi : *Pour que des fonctions continues dans un même ensemble* E *compact et fermé de points de* Ω *soient telles que de toute suite de ces fonctions on puisse extraire une suite uniformément convergente, il faut et il suffit que ces fonctions soient en tout point de* E *bornées et également continues* (5).

En particulier, appelons *fonction* au plus *du pre-*

---

(1) *Voir* ma Thèse, p. 27.

(2) *Voir* plus haut la définition d'un ensemble compact.

(3) *Loc. cit.*, p. 26.

(4) *Loc cit.*, p. 9.

(5) *Loc. cit.*, p. 30.

mier degré [1] une fonction *continue dans* Ω telle que la quantité

$$\Phi(x) + \Phi(y) - \Phi(x+y)$$

soit indépendante de x et de y.

Nous allons chercher son expression générale. Pour cela, posons

$$F(x) \equiv \Phi(x) - \Phi(0);$$

$F(x)$ sera une fonction continue telle que

$$F(x) + F(y) - F(x+y) = 0.$$

On voit facilement que

$$F(cx) = cF(x)$$

si c est un nombre rationnel, d'après la méthode bien connue de Cauchy. Or, si c tend vers un nombre irrationnel c', $F(cx)$ tendra vers $F(c'x)$, puisque la fonction est continue; donc l'égalité a lieu quel que soit le nombre réel c. On en déduit facilement que, quels que soient les nombres réels $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et les points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, on a

$$F(c_1 x^{(1)} + \ldots + c_n x^{(n)}) = c_1 F(x^{(1)}) + \ldots + c_n F(x^{(n)}).$$

Alors, si l'on appelle $i^{(k)}$ le point dont la coordonnée d'ordre k est égale à 1, les autres coordonnées étant égales à 0, et $x^{(k)}$ le point dont les k premières coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont celles du point x, les autres étant égales à 0, on aura

$$\begin{aligned} F(x^{(k)}) &= F(x_1 i^{(1)} + x_2 i^{(2)} + \ldots + x_k i^{(k)}) \\ &= x_1 F(i^{(1)}) + x_2 F(i^{(2)}) + \ldots + x_k F(i^{(k)}). \end{aligned}$$

---

(1) *Cf.* MAURICE FRÉCHET, *Sur les opérations linéaires* (*Transactions of the American mathematical Society*, 1904, p. 493; 1905, p. 134; 1907, p. 433).

En posant

$$F(i^{(k)}) = u_k, \qquad \Phi(0) = u_0,$$

on a

$$\Phi(x^{(k)}) = u_0 + u_1 x_1 + \ldots + u_k x_k.$$

Or, x est le point limite de $x^{(k)}$; donc $u_1 x_1 + \ldots + u_k x_k$ tend vers $F(x)$.

Ainsi, la série

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_k x_k + \ldots$$

est convergente quels que soient les nombres $x_1, x_2, \ldots,$ pourvu que Σx_k^2 converge. Il faut et il suffit pour qu'il en soit ainsi que la série Σu_k^2 converge. On a alors

$$\Phi(x) = u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_k x_k + \ldots.$$

Réciproquement, si u_0, u_1, ... sont des nombres réels tels que $\Sigma (u_k)^2$ converge, la série

$$u_0 + u_1 x_1 + \ldots + u_k x_k + \ldots$$

converge vers une fonction du premier degré dans Ω.

De même, appelons *fonction* au plus *du second degré* dans Ω une fonction $\Psi(x)$ continue dans Ω et telle que la quantité

$$\begin{aligned}\Psi(x+y+z) - \Psi(x+y) - \Psi(y+z)\\ - \Psi(z+x) + \Psi(x) + \Psi(y) + \Psi(z)\end{aligned}$$

soit indépendante de x, y, z.

En posant

$$2\,G(x) \equiv \Psi(x) - \Psi(-x),$$

on aura

$$\begin{aligned}G(x+y+z) - G(x+y) - G(y+z)\\ - G(z+x) + G(x) + G(y) + G(z) = 0,\end{aligned}$$

avec

$$G(x) = -G(-x).$$

On tire de la deuxième relation $G(0) = 0$, et en faisant $z = -x - y$ dans la première,

$$G(0) - G(-z) - G(-x) - G(-y) \\ + G(x) + G(y) + G(z) = 0,$$

d'où

$$G(x+y) - G(x) - G(y) = 0.$$

Ainsi $G(x)$ est une fonction au plus du premier degré, telle que $G(0) = 0$; elle est donc de la forme

$$G(x) \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots,$$

la série Σu_i^2 étant convergente. Posons maintenant

$$H(x) \equiv \Psi(x) - G(x) - \Psi(0).$$

On aura encore

$$(22) \quad \begin{cases} H(x+y+z) - H(x+y) - H(y+z) \\ \quad - H(z+x) + H(x) + H(y) + H(z) = 0, \\ \qquad H(0) = 0; \end{cases}$$

mais cette fois

$$H(x) = H(-x).$$

Faisons dans (22) $y = x$, $z = -x$; on aura

$$H(2x) = 4H(x).$$

On voit qu'on a $H(cx) = c^2 H(x)$ pour $c = 0, 1, 2$. Il est facile de montrer que, si l'égalité est vraie pour $c = 0, 1, 2, \ldots, n$, elle est vraie pour $c = n+1$; il suffit pour le voir de faire dans (22)

$$y = x, \qquad z = (n-1)x.$$

Ensuite, on démontre par la méthode bien connue de Cauchy que l'égalité

$$H(cx) = c^2 H(x),$$

ayant lieu pour tout nombre entier, a lieu pour tout nombre rationnel, puis pour tout nombre réel.

Soit maintenant a un point déterminé de Ω; la quantité

$$V(x, a) \equiv H(x+a) - H(x) - H(a)$$

est une fonction de x bien déterminée et continue dans Ω, et l'on a, en tenant compte de (22),

$$V(x+y, a) - V(x, a) - V(y, a) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(0, a) = 0.$$

Donc $V(x, a)$ est une fonction homogène du premier degré par rapport à x. D'où, quels que soient les nombres réels $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et les points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ de Ω,

$$V(X, a) = c_1 V(x^{(1)}, a) + \ldots + c_n V(x^{(n)}, a),$$

avec

$$X \equiv c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_n x^{(n)}.$$

Ceci a lieu quel que soit le point a; alors, comme $V(x^{(k)}, a) = V(a, x^{(k)})$, on aura

$$\begin{aligned} V(X, X) &= c_1 V(X, x^{(1)}) + \ldots + c_n V(X, x^{(n)}) \\ &= c_1 [c_1 V(x^{(1)}, x^{(1)}) + c_2 V(x^{(2)}, x^{(1)}) + \ldots] + \ldots \\ &= \sum_1^n c_h c_j V(x^{(h)}, x^{(j)}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$V(X, X) = H(2X) - H(X) - H(X) = 2H(X).$$

D'où, en définitive,

$$H(c_1 x^{(1)} + \ldots + c_n x^{(n)}) = \sum_{1}^{n}{}_{h,j} \left\{ c_h c_j \left[\frac{H(x^{(h)} + x^{(j)}) - H(x^{(h)}) - H(x^{(j)})}{2} \right] \right\}.$$

En particulier, avec les notations employées plus haut,

$$H(x^{(k)}) = \sum_1^k{}_{j,h} u_{h,j} x_i x_j,$$

avec

$$u_{h,j} = \frac{\mathrm{H}(i^{(h)} + i^{(j)}) - \mathrm{H}(i^{(h)}) - \mathrm{H}(i^{(j)})}{2}.$$

Les $u_{h,j}$ sont des constantes déterminées quels que soient les entiers h, j et telles que $u_{h,j} = u_{j,h}$.

En passant à la limite, on voit que la série

$$\sum_1^\infty u_{h,j} x_i x_j$$

doit converger quel que soit le point x de Ω de coordonnées x_1, x_2, ..., et la limite est $\mathrm{H}(x)$.

De sorte qu'*on obtient enfin l'expression générale des fonctions du second degré au plus dans* Ω *sous la forme*

$$\Psi(x) = u_0 + \sum_1^\infty{}_j u_j x_j + \sum_1^\infty{}_{j,h} u_{j,h} x_h x_j.$$

La méthode peut s'étendre aux fonctions du troisième degré, etc.

Application à la théorie des fonctions. — M. Riesz et M. Fischer ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite infinie de nombres réels a_1, a_2, ... représente la suite des coefficients de Fourier d'une fonction d'une variable réelle sommable et de carré sommable est que la série

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots$$

soit convergente. Donc à tout point de Ω correspond une telle fonction ayant pour coefficients de Fourier les coordonnées du point, et inversement. Il faut remarquer que la fonction n'est déterminée que sauf peut-être pour un ensemble de valeurs de la variable de mesure nulle. Mais, si parmi les fonctions ayant des coefficients de Fourier donnés, il existe une fonction continue, il n'en existe pas deux.

Ceci étant, on voit que *tous les théorèmes énoncés plus haut s'expriment en prenant comme éléments, non des points, mais des fonctions.*

Au lieu de dire qu'un point $a^{(n)}$ tend vers un point b, on dira qu'une fonction f_n converge en moyenne vers une fonction f et cela voudra dire que

$$\int_0^{2\pi} [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx$$

tend vers o. Il suffit pour cela que $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$, mais ce n'est pas nécessaire.