PHILBERT DU PLESSIS

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 287-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__287_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2089.

(1908, p. 9..)

On considère dans le plan d'une courbe (M) *un pôle* O. *Si* n *et* t *sont les points de rencontre respectifs de la normale et de la tangente en un point* M *de cette courbe avec la perpendiculaire élevée en* O *au rayon vecteur* OM, *et si l'on connaît la direction de la normale en* t, *au lieu de ce point* t [*adjointe infinitésimale* (t) *de M. d'Ocagne*], *on a une construction du centre de courbure* μ, *répondant au point* M, *sous les deux formes suivantes :*

1° *La parallèle menée, à la normale en* t, *par le point de rencontre* α *du rayon vecteur* OM *avec la perpendiculaire élevée en* n *à la normale* Mn, *coupe cette dernière au centre de courbure* μ.

2° *Si, au point de rencontre* N *de la normale* Mn *avec la parallèle menée par* O *à la normale en* (t), *on élève une perpendiculaire* Mn *jusqu'à sa rencontre en un point* V *de* OM, *la perpendiculaire élevée en ce point* V *à* OM *coupe* Mn *au centre de courbure* μ.

Appliquer cette construction dans le cas particulier où la courbe (M) *est une conique de foyer* O.

(Farid-Boulad).

SOLUTION

Par M. Ph. du Plessis.

Appelons u et v les points où la normale en t à la courbe (t) coupe respectivement les droites MO et Mn Si les points M et t sont considérés sur la droite variable Mt, on a

$$\frac{d(\mathrm{M})}{d(t)} = \frac{\mathrm{M}\mu}{tv}.$$

Mais si $d\theta$ est l'angle infiniment petit dont tournent simultanément les droites OM et Ot, on a

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{M}n.\,d\theta, \qquad d(t) = tu.\,d\theta.$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{M}\mu} = \frac{tu}{tv}.$$

Si la parallèle à tu menée par μ coupe MO en α et Mt en s, on a

$$\frac{tu}{tv} = \frac{s\alpha}{s\mu}.$$

Donc,

$$\frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{M}\mu} = \frac{s\alpha}{s\mu}$$

et, par suite, αn est parallèle à Mt, ce qui établit la première proposition.

On a ensuite, en vertu de la construction indiquée,

$$\frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{M}\alpha}{\mathrm{MV}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{M}\mu} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M}\alpha},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{M}\mu} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{MV}}$$

et, par suite, Vμ est parallèle à On, c'est-à-dire perpendiculaire à OM.

Si la courbe (M) est une conique de foyer O, la ligne (t) est une perpendiculaire à l'axe focal. Donc, *si la perpendiculaire élevée au rayon vecteur par le foyer* O *coupe la normale en n, et si la perpendiculaire élevée à la normale en n coupe le rayon vecteur en α, le centre de courbure est sur la parallèle à l'axe focal menée par α.*

Autre solution par M. Bros.