NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DELTOUR

Continuants : applications à la théorie des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 264-282

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__264_0>

[I23a]

CONTINUANTS : APPLICATIONS A LA THÉORIE DES NOMBRES ;

PAR M. A. DELTOUR.

(SUITE.)

DEUXIÈME PARTIE.

CONTINUANTS ENTIERS.

OBJET ET DÉFINITIONS.

44. Les relations algébriques établies au cours de la première Partie seront appliquées dans celle-ci au cas où tous les éléments sont des nombres entiers et seront développées au point de vue arithmétique.

Nous appellerons *continuants entiers* ceux dont tous les éléments sont des nombres entiers, ces continuants étant toujours supposés normaux, sauf indication contraire.

Les continuants entiers, dont tous les éléments ont le même signe et sont différents de o, seront dits *positifs* ou *négatifs*, suivant le signe des éléments.

Parmi eux, il faut distinguer les continuants *courts*, dont le dernier élément est différent de ± 1 (les éléments étant ordonnés de gauche à droite) et les continuants *longs*, dont le dernier élément est ± 1.

Un continuant court, dont le premier élément est différent de ± 1, sera dit *réduit*.

Par exemple,

$$(4, 6, 9) \quad (1, 3, 6, 9)$$

sont des continuants courts dont le premier est réduit;

$$(4, 6, 8, 1) \quad (1, 3, 6, 8, 1)$$

sont des continuants longs.

Ces quatre continuants représentent le même nombre 229.

On admettra que (α) et $(\underline{\alpha})$ sont des continuants distincts.

$(\alpha_{1,0})$ sera dit *résidu* de (α),

$(\alpha_{0,1})$ *résidu inverse*.

45. Il est évident que la valeur d'un continuant entier est un nombre entier et celle d'un continuant positif un nombre positif.

Mais, inversement, un nombre entier $\pm$ N est représenté par un nombre illimité de continuants.

Les procédés de transformation indiqués dans la première Partie vont servir à passer d'une représentation quelconque de $\pm$ N à une autre en les réduisant d'abord toutes deux à des continuants positifs qui, eux-mêmes, se déduisent ensuite l'un de l'autre.

RAPPORTS $\frac{(\alpha)}{(\alpha_{1,0})}$, $\frac{(\alpha)}{(\alpha_{0,1})}$.

46. *Le nombre* N, *représenté par un continuant* (α), *est premier avec les nombres* R, R', *représentés par* $(\alpha_{1,0})$, $(\alpha_{0,1})$.

Cela résulte de la relation (VI) (n° 19) et constitue une propriété essentielle des continuants entiers.

Remarque. — De la relation (VI) résulte aussi la congruence

$$RR' \equiv (-1)^{n_\alpha+1} \pmod{N}.$$

Pour $R = 0$, on a nécessairement

$$N = \pm 1.$$

47. *La valeur de* $\frac{(\alpha)}{(\alpha_{1,0})}$ *ne change pas lorsqu'on* *applique à* $(\alpha_{1,0})$ *les procédés de transformation suivants :*

1° Introduction, soit entre deux éléments, soit avant le premier, soit après le dernier, de suites des types θ, θ' (n° 11), ou des types η, η', en changeant les signes des éléments qui suivent η ou η' (n° 11), ou du type $i\lambda'$, suivant la notation du n° 31, pour les continuants alternés.

2° Équivalence de a et de b, o, c, lorsqu'on a $a = b + c$ (n° 14).

Il est facile de vérifier l'exactitude de ces propositions et d'en énoncer d'analogues pour le rapport $\frac{(\alpha)}{(\alpha_{0,1})}$.

Remarques. — 1° Pour calculer la valeur d'un continuant où figurent des suites η', il faut se reporter aux indications du n° 11.

Soient (α') un continuant où figurent p suites η', (α) le même continuant où les suites η' sont remplacées par des suites η ; on a

$$(\alpha') = (-1)^p (\alpha).$$

2° La valeur de $\frac{(\alpha)}{(\alpha_{1,0})}$ change de signe lorsqu'on introduit, comme il a été indiqué, des suites η, η', mais en changeant les signes des éléments qui *précèdent* η ou η'.

3° Parmi les suites $i\lambda'$, on aura à considérer principalement les suites

$$(o, i, i, i, o) \quad (o - i - i - i - o) \quad (i, i, i) \quad (-i, -i, -i),$$

qui seront désignées respectivement par

$$I \quad -I \quad I_{1,1} \quad -I_{1,1}.$$

48. *Lorsqu'on passe d'un continuant* (α) *au continuant alterné* $(i\alpha')$ *au moyen de la relation* (IX) $i^{n_\alpha^2}(\alpha) = (i\alpha')$ (*n*° 30, *Remarque*), *on a*

$$\frac{(\alpha)}{(\alpha_{1,0})} = -i\frac{(i\alpha')}{(i\alpha'_{1,0})}.$$

En effet, cette relation résulte des deux suivantes :

$$\begin{cases} i^{n_\alpha^2}(\alpha) = (i\alpha'), \\ i^{(n_\alpha-1)^2}(\alpha_{1,0}) = (-1)^{n_\alpha-1}(i\alpha'_{1,0}). \end{cases}$$

49. *Si* (α) *est positif et de valeur* N, *les valeurs* R, R' *de* $(\alpha_{1,0})$ *et* $(\alpha_{0,1})$ *sont au plus égales* à N.

En effet, a_1 étant le premier élément de (α), on a (n° 5)

$$(\alpha) = a_1(\alpha_{1,0}) + (\alpha_{2,0}),$$

relation où tous les termes sont positifs. Le minimum de a_1 est 1, celui de $(\alpha_{2,0})$ est 0, donc $(\alpha) \geqq (\alpha_{1,0})$.

On trouvera de même $(\alpha) \geqq (\alpha_{0,1})$.

Remarque. — On a toujours $(\alpha) > (\alpha_{1,0})$, sauf pour les valeurs particulières

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ (\alpha_{2,0}) = 0, \end{cases}$$

qui donnent $N = (\alpha) = (\alpha_{1,0})$.

Dans ce cas, (α) se réduit à (1).

NOMBRE DE CONTINUANTS POSITIFS D'UNE VALEUR DONNÉE.

50. *Le nombre de représentations de* N *par des continuants courts positifs est* $\varphi(N)$, $\varphi(N)$ *étant l'indicateur*.

Lorsqu'on développe une fraction irréductible $\frac{N}{R}$ (N et R positifs, $R < N$) en fraction continue, on obtient chaque quotient incomplet par une division dont tous les termes peuvent être identifiés avec ceux de la formule de récurrence donnée au n° 5, en supposant les continuants positifs, savoir

$$(a, \beta) = a(\beta) + (\beta_{1,0}),$$

a étant le quotient et $(\beta_{1,0})$ le reste de la division de (a, β) par (β).

Ainsi, le quotient de la première division est le premier élément a d'un continuant et la suite des quotients incomplets obtenus n'est autre que celle des éléments d'un continuant positif (α), tel que

$$\begin{cases} (\alpha) = N, \\ (\alpha_{1,0}) = R. \end{cases}$$

Par son mode de formation, ce continuant est unique et diffère de celui qui proviendrait de toute autre fraction.

D'autre part, l'opération s'arrête dès que le reste devient égal à 1. Le dernier quotient incomplet est égal au reste de l'avant-dernière division et, par conséquent, supérieur à 1;

(α) est donc un continuant court.

Par exemple, pour la fraction $\frac{N}{R} = \frac{27}{10}$, on trouve $(\alpha) = (2, 1, 2, 3)$.

Réciproquement, un continuant court positif donné (α) provient d'une certaine fraction $\frac{N}{R}$, les éléments de l'un étant les quotients incomplets de l'autre.

Pour une valeur donnée de N, il existe, par conséquent, autant de continuants courts positifs distincts, de valeur N, que de fractions irréductibles $\frac{N}{R}$, c'est-à-dire $\varphi(N)$.

Remarques. — 1° *Continuants réduits.* — Le premier élément de (α) est > 1 si $2R < N$.

Il y a donc $\frac{\varphi(N)}{2}$ continuants positifs réduits.

Exemple : $N = 11$.

$$\begin{array}{llllll} R = & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ (\alpha) = & (11), & (5,2), & (3,1,2), & (2,1,3), & (2,5). \end{array}$$

Au résidu R correspond un résidu R_1 tel que $R + R_1 = N$. Le continuant de la fraction $\frac{N}{R_1}$ commence par 1.

2° *Continuants positifs.* — A tout continuant court correspond un continuant long. Le nombre total des continuants positifs de valeur N est donc $2\varphi(N)$.

3° Les nombres n_α relatifs à deux continuants positifs, court et long, correspondants, sont de parité différente. S'il y a lieu de donner à $(-1)^{n_\alpha}$ un signe déterminé, on choisit l'un ou l'autre de ces deux continuants.

RÉDUCTION A UN CONTINUANT POSITIF.

31. *Les représentations de* $-N$ *se ramènent à celles de* $+N$.

En effet, soit $(\alpha, \beta) = -N$ une de ces représentations. On emploiera l'une ou l'autre des formules (T_4, n° **11**), (T_6, n° **12**), savoir :

$$(\alpha, \eta, -\beta) = (-1)^{n_\beta}(\alpha, \beta) = (-1)^{n_\beta+1} N,$$
$$(\alpha, \eta, 0, \eta, 0. \beta) = -(\alpha, \eta, \eta, 0, 0, \beta) = -(\alpha, \beta) = N.$$

Dans la première, on suppose que n_β est impair; dans la seconde, la suite $(\eta, 0, \eta, 0)$ se place dans un intervalle quelconque, ou même soit avant le premier, soit après le dernier élément.

52. *Élimination des éléments nuls.* — On passe d'une représentation (α) donnée de N à une représentation équivalente, n'ayant aucun élément égal à o, par l'application répétée de la formule (T_8) du n° 14.

Remarque. — Si l'un des éléments extrêmes, le premier par exemple, est o, on supprime les deux premiers éléments. Car on a, dans ce cas, d'après (I),

$$(\alpha) = (\alpha_{2,0}).$$

Dans cette nouvelle représentation $(\alpha_{2,0})$, le résidu R est modifié et devient $R_1 = (\alpha_{3,0})$.

De la relation

$$(\alpha_{1,0}) = \alpha_2(\alpha_{2,0}) + (\alpha_{3,0}),$$

on déduit

$$R_1 \equiv R \pmod{N}.$$

53. *Élimination des éléments égaux à* ± 1. — Le continuant (α) étant supposé privé d'éléments nuls, multiplions-le par $i^{n_\alpha^2}$ et mettons-le sous forme de continuant alterné $(i\,\alpha')$ (n° 30).

On y supprime tous les éléments égaux à $\pm i$ par l'application répétée de la formule (X) du n° 31, savoir

$$(i\alpha, i\lambda', i\beta) = (i\lambda')(i\alpha, i\beta),$$

dans laquelle on fait $(i\lambda') = \pm 1$ (n° 47, *Remarque* 3°).

On reconstitue ensuite le résultat sous forme de continuant normal équivalent au premier (α) en valeur absolue et ne contenant plus d'éléments égaux à ± 1.

Remarque. — Si l'un des éléments extrêmes de $(i\alpha')$, le premier par exemple, est $\pm i$, on le fait précéder au préalable de la suite o, $\pm i$, ce qui ne change pas la valeur du continuant.

Mais le résidu, qui était $R = (i\alpha'_{1,0})$, est modifié et devient

$$R_1 = (\pm i, i\alpha') = \pm i(i\alpha') + R.$$

On a donc

$$R_1 \equiv R \pmod{N}.$$

54. *Transformation en continuant positif.* — Le continuant étant formé comme il est expliqué au numéro précédent au moyen d'éléments $\geqq 2$ en valeur absolue, on change les signes des éléments négatifs en appliquant la formule (T_5) du n° **12** dans laquelle on fait

$$\eta = (0, -1, 1, -1, 0).$$

Par la suppression des o provenant des η, la valeur des éléments contigus à un seul η est diminuée d'une unité et celle des éléments compris entre deux η de deux unités.

Toute réduction faite, les nouveaux éléments sont tous positifs ou nuls, et par la suppression de ces derniers on obtient un continuant positif équivalent en valeur absolue au continuant donné.

Remarque. — Si le premier terme est négatif, on le fait précéder de η.

La valeur du continuant (α) n'est pas modifiée, mais il n'en est pas de même du résidu R, qui devient

$$R_1 = (\eta_{1,0}, \alpha) = -(\alpha_{1,0}) = -R.$$

55. *Exemple de réduction d'un continuant.* — Soit

$$(\alpha) = (0, 4, 2, -3, 5, 0, -6, 2, -4, -2).$$

On trouve

$$N = 67, \qquad R = 305.$$

Ce continuant passe par les transformations suivantes :

$$\begin{array}{l} (0, 4, 2, -3, 5, 0, -6, 2, -4, -2) \\ (2, -3, -1, 2, -4, -2) \\ (2i, 3i, -i, -2i, -4i, 2i) \\ (2i, 4i, -i, -4i, 2i) \\ (2i, 5i, -3i, 2i) \\ (2, -5, -3, -2) \end{array}$$

$$(\alpha_1) = (1, 1, 4, 3, 2).$$

On trouve, pour (α_1),

$$N = 67, \qquad R_1 = 37.$$

56. *Transformation d'un continuant donné* $(\alpha) = N$ *de résidu* R *en un continuant positif ou négatif de valeur* $N_1 = \pm N$ *et de résidu* R_1, *tel que* $\frac{N_1}{R_1} = \frac{N}{R}$.

Pour conserver au rapport $\frac{N}{R}$ sa valeur, on applique les procédés de transformation des nos **52**, **53**, **54** seulement aux éléments de $(\alpha_{1,0})$ dans les conditions indiquées au n° **47** et de manière à obtenir un continuant positif si $\frac{N}{R}$ est positif, négatif dans le cas contraire.

Revenons en détail sur chacune des opérations précédentes.

1° *Élimination des éléments nuls* (n° **52**). — On conserve le premier élément, s'il est égal à 0.

2° *Élimination des éléments égaux à* ± 1 (n° **53**). — En passant du continuant (α) au continuant alterné $(i\alpha')$, le rapport $\frac{N}{R}$ est multiplié par i (n° **48**).

Inversement, en revenant à un continuant normal, il est divisé par i.

Entre ces deux opérations, sa valeur reste invariable lorsqu'on supprime des suites ± 1 (n° 47).

Donc, avant et après le passage par les continuants alternés, la valeur de $\frac{N}{R}$ est la même.

D'autre part, il y a lieu de remarquer que les suites ± 1 doivent être formées entre deux éléments quelconques du continuant, mais non avant le premier. Celui-ci a, par conséquent, une valeur quelconque après l'opération, y compris $0, \pm i$.

3° *Transformation en continuant positif ou négatif* (n° 54). — L'opération précédente amène un continuant $(\beta) = (b_1\ b_2\ \ldots)$ dont tous les éléments (le premier non compris) sont $\geqq 2$ en valeur absolue.

On place la première suite η ou η' entre les deux premiers éléments de signes contraires et l'on fait dans la formule (T_5) :

$$\eta = (0, -1, 1, -1, 0)$$

si le continuant commence par des éléments positifs,

$$\eta' = (0, 1, -1, 1, 0)$$

dans le cas contraire.

Si la première suite η ou η' est placée après b_2, on voit, comme au n° 54, que tous les éléments prennent le même signe, $+$ avec η, $-$ avec η', lorsqu'on introduit ces suites dans les conditions indiquées au n° 47.

Si la première suite η ou η' est placée entre b_1 et b_2, ce qui n'a lieu que lorsque b_1 est différent de 0 et au moins égal à 1 en valeur absolue, les éléments prennent encore le même signe. Le premier, étant contigu à un η ou à un η', peut devenir 0.

Prenons comme exemple

$$(\alpha) = (0, -3. -2, 1, 4),$$

pour lequel on a

$$N = -6, \qquad R = 23.$$

Les transformations successives sont

$$\begin{array}{r}
(0, -3, -2, 1, 4) \\
(0, 3i, -2i, -i, 4i) \\
(0, 3i, -i, 5i) \\
(0, 4i, 6i) \\
(0, -4. 6) \\
(\alpha_1) = (0, -3, -1, -5).
\end{array}$$

On a, pour (α_1),

$$N_1 = 6, \qquad R_1 = -23.$$

TRANSFORMATION DES CONTINUANTS POSITIFS ENTRE EUX

37. Soient :

$(\alpha) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, ak)$ un continuant positif correspondant à $\frac{N}{R}$;

t un nombre premier positif non diviseur de N.

Cherchons le continuant positif ayant pour résidu un nombre congru à tR (mod N).

Supposons d'abord que t ne divise pas a_1; posons $a_m = b_m + c_m$ et écrivons (α) sous la forme

$$(\alpha) = \left(\overbrace{a_1}, \overbrace{b_2}, 0, \overbrace{c_2\, b_3}, 0, c_3, \ldots, \overbrace{c_{h-1}, a_h}, \overbrace{a_{h+1}, a_{h+2}}, \ldots, a_{h+2l+1}, \ldots, a_k\right),$$

les éléments b et c, qui peuvent être positifs, nuls ou négatifs, étant déterminés de manière à satisfaire aux conditions suivantes [(T_{10}), n° 16], dans lesquelles $(\alpha^{(r)})$

représente les suites d'éléments sous parenthèse dans (α), et $(\beta^{(r)})$ de nouvelles suites :

$$\left\{\begin{array}{llll}(a_1, b_2, 0) & = (\alpha') & = (\beta'), & \\ (a_1, b_2) & = (\alpha'_{0,1}) & = t(\beta'_{0,1}), & \\ (b_2, 0) & = (\alpha'_{1,0}) & = \frac{1}{t}(\beta'_{1,0}), & = 1, \\ (b_2) & = (\alpha'_{1,1}) & = (\beta'_{1,1}), & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll}(c_2, b_3, 0) & = (\alpha'') & = (\beta''), \\ (c_2, b_3) & = (\alpha''_{0,1}) & = t(\beta''_{0,1}), \\ \cdots\cdots & & \end{array}\right.$$

Les éléments b et c doivent satisfaire à ces égalités jusqu'au premier élément c divisible par t, soit c_{h-1}.

Il est toujours possible de remplir ces conditions : en effet, d'après les première et troisième égalités, (β') est le continuant qui correspond à la fraction $\frac{a_1}{t}$, et l'on choisit celui pour lequel $n_{\beta'}$ est impair (n° 50, *Remarque* 3°).

La dernière égalité détermine b_2 qui est positif. La deuxième se trouve vérifiée comme conséquence des trois autres, en vertu de la relation (VI) (n° 19).

De la relation $a_2 = b_2 + c_2$ on tire ensuite la valeur de c_2. Puisque c_2 n'est pas divisible par t, par hypothèse, on opère avec c_2 comme avec a_1 pour satisfaire aux quatre égalités suivantes, et ainsi de suite.

Il faut observer que l'un des termes c_m peut être négatif. Dans ce cas, $(\beta^{(m)})$ sera le continuant correspondant à la fraction $\frac{-c_m}{t}$ dans lequel tous les éléments seront pris négativement : b_{m+1} sera alors négatif. Ainsi, c_m et b_{m+1} sont toujours de même signe.

On pose ensuite

$$\left\{\begin{array}{ll}c_{h-1} & = tc'_{h-1}, \\ a_h & = \frac{1}{t}a'_h,\end{array}\right.$$

ce qui donne

$$(c_{h-1}, a_h) = (c'_{h-1}, a'_h).$$

On voit que ces deux derniers continuants que nous désignerons respectivement par (γ), (δ) satisfont aux conditions (T_{10}) :

$$\left\{\begin{array}{l} (\gamma) \quad = (\delta), \\ (\gamma_{0,1}) = t\,(\delta_{0,1}), \\ (\gamma_{1,0}) = \dfrac{1}{t}\,(\delta_{1,0}), \\ (\gamma_{1,1}) = (\delta_{1,1}) = 1. \end{array}\right.$$

Supposons que $a_{h+1}, a_{h+3}, a_{h+5}, \ldots$, jusqu'à a_{h+2l+1} exclusivement, soient encore divisibles par t.

On pose de même

$$\left\{\begin{array}{l} a_{h+1} = t\,a'_{h+1}, \\ a_{h+2} = \dfrac{1}{t}\,a'_{h+2}. \end{array}\right.$$

On a encore deux continuants

$$(\gamma') = (a_{h+1}, a_{h+2}),$$
$$(\delta') = (a'_{h+1}, a'_{h+2}),$$

satisfaisant aux conditions (T_{10}) et ainsi de suite jusqu'à

$$(a_{h+2l-1}, a_{h+2l}).$$

On forme alors à partir de a_{h+2l+1} une nouvelle série d'éléments analogue à celle obtenue en partant de a_1.

A la fin de l'opération, on arrive à une suite de trois éléments $(\alpha^{(r)})$ ou de deux éléments $(\gamma^{(s)})$ précédant immédiatement, soit a_k, soit a_{k-1}, a_k, soit c_{k-1}, a_k.

Dans le premier cas, a_k n'est pas divisible par t, car les éléments qui le précèdent constituent un continuant (ε) composé de parties $(\alpha')\,(\alpha'')\ldots(\gamma)\,(\gamma')\ldots$ satisfaisant aux conditions (T_{10}) et, par conséquent, $(\varepsilon_{0,1})$ a pour facteur t (nº 16).

Or, on a

$$N = (\varepsilon, a_k) = a_k(\varepsilon) + (\varepsilon_{0,1}).$$

Si a_k était divisible par t, N le serait aussi, contrairement à l'hypothèse.

Le continuant est alors terminé par la suite

$$\overbrace{a_k, b_{k+1}, 0}.$$

Dans les deux derniers cas, le continuant est terminé par l'une des suites

$$\overbrace{a_{k-1}, a_k} \quad \text{ou} \quad \overbrace{c_{k-1}, a_k},$$

si a_{k-1}, c_{k-1} sont divisibles par t, et par

$$\overbrace{a_{k-1}, b_k, 0}, \overbrace{c_k, b_{k+1}, 0}. \qquad \text{ou} \qquad \overbrace{c_{k-1}, b_k, 0}, \overbrace{c_k, b_{k+1}, 0},$$

s'ils ne le sont pas, puisque c_k, pour la même raison que a_k dans le premier cas, ne peut pas être divisible par t.

Finalement, on obtient deux continuants

$$(\alpha) = (\alpha', \alpha'', \ldots, \gamma, \gamma', \ldots),$$
$$(\beta) = (\beta', \beta'', \ldots, \delta, \delta', \ldots),$$

qui satisfont aux conditions (T_{10}), comme les suites qui les composent, savoir :

$$\begin{cases} (\alpha) \quad = (\beta), \\ (\alpha_{0,1}) = t\,(\beta_{0,1}), \\ (\alpha_{1,0}) = \dfrac{1}{t}(\beta_{1,0}), \\ (\alpha_{1,1}) = (\beta_{1,1}). \end{cases}$$

On a donc

$$(\beta) = N, \qquad (\beta_{1,0}) = tR.$$

Il ne reste plus qu'à réduire (β) en continuant positif.

On a admis au début que a_1 était premier avec t. Si t divise a_1, on commence l'opération comme si le premier élément était a_{h+1}.

Remarque. — Le continuant donné était supposé positif. Il est facile de voir qu'on obtiendrait une transformation semblable avec un continuant entier quelconque.

58. *Cas où t est un nombre quelconque premier avec* N.

Pour passer d'un continuant de résidu R à un continuant de résidu congru à tR, lorsque t n'est pas un nombre premier, le procédé du n° 57 est encore applicable si le plus grand commun diviseur de t et de chacun des éléments $a_{(m)}$ ou $c_{(m)}$ est toujours 1 ou t. Dans le cas contraire, on l'applique successivement à chacun des facteurs dont t est le produit et pour lesquels l'opération est possible, ce qui a lieu, en particulier, pour les facteurs premiers de t.

Si t est une racine de la congruence

$$x^d - 1 \equiv 0 \pmod{N},$$

d étant un diviseur de $\varphi(N)$, on retrouve le continuant donné après d opérations.

Lorsque t est une racine primitive de N, *on obtient tous les continuants positifs de valeur* N, *au moyen de* $\varphi(N)$ *opérations.*

59. *Application à quelques cas particuliers.*

1° Soit $t = 2$.

Les suites $(\alpha^{(r)})$, $(\gamma^{(s)})$, qui composent (α) (n° 57), sont respectivement de la forme

$$(2m+1, 1), \quad (2p, q)$$

Les suites correspondantes $(\beta^{(r)})$, $(\delta^{(s)})$ de (β) sont

$$(m, 1, 1), \quad (p, 2q).$$

Soit, par exemple,

$$(\alpha) = (4, 1, 1, 8), \quad N = 77, \quad R = 17$$

Ce continuant devient

$$(\alpha) = (\overbrace{4}, \overbrace{1}, \overbrace{1, 1, 0}, \overbrace{7, 1, 0}),$$

d'où

$$\begin{aligned}(\beta) &= (\overbrace{2}, \overbrace{2}, \overbrace{0, 1, 1}, \overbrace{3, 1, 1})\\ &= (2, 3, 1, 3, 2).\\ R_1 &= 34.\end{aligned}$$

2° Soit $t = 3$.

On a, pour $(\alpha^{(r)})$, $(\gamma^{(s)})$, les suites

$$(3m+1, 2, 0), \quad (3m+2, 1, 0), \quad (3p, q),$$

auxquelles correspondent dans (β)

$$(m, 2, 1), \quad (m, 1, 2), \quad (p, 3q).$$

Pour les mêmes valeurs, $N = 77$, $R = 17$, (α) devient

$$(\alpha) = (\overbrace{4, 2, 0}, \overbrace{-1, -2, 0}, \overbrace{3}, \overbrace{8}),$$

d'où

$$(\beta) = (\overbrace{1, 2, 1}, \overbrace{0, -2, -1}, \overbrace{1}, \overbrace{24}).$$

Pour réduire (β) en continuant positif, on passe par les transformations suivantes :

$$(1, 2, -1, -1, 1, 24)$$
$$(i, -2i, -i, i, i, -24i)$$
$$(i, -2i, -2i, 0, -24i)$$
$$(i, -2i, -26i)$$
$$(1, 2, -26)$$
$$(1, 1, 1, 25).$$
$$R_1 = 51.$$

3° Soit $t = 13$.

Pour les mêmes valeurs de N et de R, on a

$$(\alpha) = (\overbrace{4, 3, 0}, \overbrace{-2, -6, 0}, \overbrace{7, 11, 0}, \overbrace{-3, -4, 0}),$$
$$(\beta) = (\overbrace{0, 3, 4}, \overbrace{0, -6, -2}, \overbrace{0, 1, 1, 5}, \overbrace{1, 0, -4, -3}),$$
$$= (0, 3, -2, -1, 1, 5, -3, -3).$$

Transformé en continuant positif, (β) devient

$$(0, 2, 1, 6, 1, 2, 3).$$
$$R_1 = 221 = 13.17.$$

4° Soit $N = 11$.

Formons ses continuants positifs réduits au moyen de la racine primitive $t = 2$.

R.	(β).		(α).		(α).
1.....			(11)	$=$	$(10, 1)$
2.....	$(5, 2)$	$=$	$(5, 2)$	$=$	$(5, 1, 0, 1, 1, 0)$
3.....	$(2, 1, 1, 0, 1, 1)$	$=$	$(2, 1, 3)$	$=$	$(2, 1, 2, 1)$
4.....	$(1, 2, 1, 2)$	$=$	$(3, 1, 2)$	$=$	$(3, 1, 0, 0, 2)$
5.....	$(1, 1, 1, 0, 4)$	$=$	$(2, 5)$	$=$	$(2, 5)$
6....,	$(1, 10)$	$=$	(11)		

MULTIPLICATION ET DIVISION D'UN CONTINUANT PAR UN NOMBRE DONNÉ.

60. *Caractère de divisibilité d'un continuant par un nombre donné.*

Comme on l'a vu au n° 57, la condition nécessaire et suffisante pour que t divise N (t étant premier), est qu'à la fin de l'opération a_k ou c_k soit divisible par t.

On voit facilement qu'il en est de même pour un nombre t quelconque, premier ou non, pourvu que l'opération soit possible.

Plus généralement, si N est mis sous la forme d'un continuant $(\varepsilon, \varepsilon')$ où, (ε') étant quelconque, (ε) satisfait aux conditions T_{10}; où, par conséquent, $(\varepsilon_{0,1})$ est divisible par t et (ε) est premier avec t (t étant premier ou non), on a

$$(\varepsilon, \varepsilon') \equiv (\varepsilon)(\varepsilon') \equiv N \pmod{t}.$$

Donc, pour que N soit divisible par t, il faut et il suffit qu'on ait

$$(\varepsilon') \equiv 0 \pmod{t}.$$

Si cette condition n'est pas satisfaite et si N est premier avec t, on a, suivant la notation du n° 57, en supposant la formule applicable à t,

$$N = (\alpha) = (\alpha', \alpha'', \ldots, \gamma, \gamma', \ldots).$$

Comme tous les résidus inverses $(\alpha'_{0,1})$, ..., $(\gamma_{0,1})$, ... sont divisibles par t, on voit facilement (II, n° 6) qu'on a

$$N \equiv (\alpha')(\alpha'') \ldots (\gamma)(\gamma') \ldots \pmod{t},$$

c'est-à-dire

$$N \equiv a_1 c_2 c_3 \ldots c_{h-2} . 1 . 1 \ldots \pmod{t}$$

61. La transformation du n° 57 permet de *multiplier* un continuant donné (λ) par un nombre quelconque, en opérant successivement avec tous les facteurs premiers t qui composent ce nombre.

Posons à cet effet $(m, \lambda) = (\alpha)$ et déterminons m de telle sorte que t soit premier avec (α) en faisant, par exemple, $m = 0$ si t est premier avec $(\lambda_{1,0})$, $m = 1$ dans le cas contraire.

On cherche le continuant (β) correspondant à (α) (suivant la notation du n° **57**) et on le réduit à un continuant positif (β') en conservant la valeur de $\frac{(\beta)}{(\beta_{1,0})}$.

Le résidu $(\beta'_{1,0})$ de ce dernier a pour valeur le produit $t\,(\lambda)$.

62. Pour *diviser* (λ) par un de ses diviseurs t, on opère de la même manière sur $(\lambda, m) = (\alpha)$. Quel que soit m, t est premier avec (α). On réduit (β), correspondant à (α), à un continuant positif (β') en conservant la valeur de $\frac{(\beta)}{(\beta_{0,1})}$. Le quotient $\frac{(\lambda)}{t}$ est représenté par le résidu inverse $(\beta'_{0,1})$ du dernier continuant obtenu.

(*A suivre.*)