NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. CLAPIER

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1907). Solution de la question de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 25-33

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__25_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1907).

SOLUTION DE LA QUESTION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL (²);

PAR M. C. CLAPIER.

1° Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de la surface S; désignons par $(p, q, -1)$ les coefficients directeurs du plan tangent en ce point. Les aires du triangle OMP et OMQ ont pour valeurs respectives

$$\frac{px + qy - z}{2p}\sqrt{y^2 + z^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{px + qy - z}{2q}\sqrt{z^2 + x^2},$$

(¹) *Voir*, par exemple : SALMON, *Géométrie à trois dimensions*, Chap. XII.

(²) *Voir* l'énoncé page 328.

si donc, on laisse de côté les cônes de sommet O', qui satisfont à l'équation

$$px + qy - z = 0,$$

il reste, pour déterminer les surfaces cherchées, la double équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1) \qquad 0 = p\sqrt{x^2 + z^2} + \varepsilon q \sqrt{y^2 + z^2} \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon = +1 & (E_1), \\ \varepsilon = -1 & (E_2). \end{array} \right.$$

Les caractéristiques de l'une de ces surfaces sont données par le système

$$(2) \qquad \frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{dy}{\varepsilon\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{dz}{0};$$

et comme $\varepsilon^2 = 1$, les équations finies de ces courbes pourront s'écrire, avec les constantes a et b,

$$(3) \qquad \frac{x + \sqrt{x^2 + z^2}}{y + \varepsilon\sqrt{y^2 + z^2}} = a, \qquad z = b.$$

Les familles de cette congruence nous donnent les équations finies des surfaces S, que l'on peut écrire

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + z^2}}{y + \varepsilon\sqrt{y^2 + z^2}} = \text{fonct. } (z) \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon = +1 & (S_1), \\ \varepsilon = -1 & (S_2). \end{array} \right.$$

Dans le cas où ces surfaces sont algébriques, à coefficients réels, l'équation précédente rendue entière ne contiendra plus ε et nous n'aurons qu'une seule forme en x, y, z avec des coefficients rationnels ; il sera donc possible de passer d'une surface S_1 à une surface S_2 par une variation continue des coefficients qui entrent dans la première.

Rendons entière l'équation (3), homogène en x, y, z;

nous avons, à l'aide de calculs faciles,

$$(4)\quad \begin{matrix} X = \sqrt{x^2+z^2} \\ Y = \sqrt{y^2+z^2} \end{matrix} \Bigg\} \; 2x(x+X) - 2a^2y(y+\varepsilon Y) = (a^2-1)z^2,$$

$$\frac{x+X}{a} = \frac{y+\varepsilon Y}{1} = \frac{(a^2-1)z^2}{2a(x-ay)},$$

et formant

$$X^2 - Y^2 = x^2 - y^2,$$

il vient

$$(5)\qquad x^2+y^2-\frac{a^2+1}{a}xy = \left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 z^2.$$

Cette équation du deuxième degré représente soit une surface S_1, soit une surface S_2, lorsqu'on prend pour a une fonction arbitraire de z; la trace sur le plan xOy de l'une de ces surfaces ne peut donc être que le système des deux droites

$$(6)\qquad x^2+y^2-2\lambda xy = 0, \qquad \lambda = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right).$$

2° Prenons pour fixer les idées une caractéristique γ de l'équation (E_1), déterminée par les paramètres a et b; de sorte que

$$a = \frac{x+\sqrt{x^2+b^2}}{y+\sqrt{y^2+b^2}}$$

est un nombre donné positif. Par suite λ, d'après sa valeur (6), est un nombre plus grand que l'unité; l'équation (5) s'écrit à l'aide de cette nouvelle constante

$$(7)\qquad x^2+y^2-2\lambda xy-(\lambda^2-1)z^2 = 0.$$

Elle représente le cône ayant pour sommet l'origine et pour base la caractéristique. Les directions de plans des sections circulaires de ce cône Γ s'obtiendront à l'aide des racines de l'équation en S, qui sont :

(8) $$s_1 = 1 - \lambda^2, \qquad s_2 = 1 - \lambda, \qquad s_3 = 1 + \lambda.$$

La racine moyenne s_2 nous donne les plans réels

(9) $$\begin{cases} x - y + z\sqrt{\lambda - 1} & (\pi), \\ x - y - z\sqrt{\lambda - 1} & (\pi'). \end{cases}$$

Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace; le cône T qui passe par ce point correspond à la valeur

$$a = \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 + z_0^2}}{y_0 + \sqrt{y_0^2 + z_0^2}} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{a + 1}{2a};$$

les droites D et D′ qui passent par ce point sont les normales aux plans π et π' du système (9).

La valeur minimum que puisse prendre le paramètre réel λ est 1 ; elle a lieu pour $a = 1$, auquel cas $x_0 = y_0$. Ainsi, lorsque le point M se trouve dans le plan bissecteur du premier trièdre des coordonnées d'arête Oz, $\lambda = 1$ et les droites D et D′ coïncident avec la normale à ce plan bissecteur.

On aurait pu obtenir plus simplement ce résultat en cherchant la condition pour que le cône (7) soit de révolution; il ne peut le devenir qu'en se réduisant à un plan double (B).

Prenons un contour plan fermé C ne se coupant pas et ne rencontrant aucun des axes Ox et Oy; lorsque M décrira ce contour, a, et par suite λ, ne pourra devenir ni nul ni infini. Si le contour C ne rencontre pas le plan bissecteur (B), $\lambda - 1$ variera d'une manière continue sans jamais s'annuler, et les droites D et D′ dont la direction est déterminée par le système (9) se déplaceront d'une manière continue, sans pouvoir s'échanger l'une dans l'autre; la position finale de l'une d'elles coïncidera avec sa position initiale; leurs traces P et P′ sur un plan parallèle à celui du contour C décriront, en général, deux courbes fermées distinctes. L'une de ces traces pourra cependant aller à l'infini.

Si l'on suppose que le contour C rencontre le plan (B), il le rencontrera un nombre pair de fois; de sorte que, bien que chaque fois il y ait échange des droites D et D′ l'une dans l'autre, nous reviendrons au point de départ avec la même situation; mais les traces P et P′ auront été confondues $2n$ fois et les deux courbes fermées qu'elles décriront ne seront plus distinctes; elles se traverseront $2n$ fois et formeront $2n+1$ boucles.

Remarque. — Nous avons supposé que nous prenions un cône Γ correspondant à une caractéristique de l'équation (E_1). Si nous avions pris le cône (7) qui correspond à l'équation (E_2), il aurait fallu supposer λ négatif et < -1; la racine moyenne de l'équation en S serait alors s_3 et les deux droites D et D′ coïncideraient lorsque M traverse le deuxième plan bissecteur du dièdre Oz.

3° Sur une surface S, les caractéristiques γ sont dans des plans parallèles au plan des xy et vérifient l'équation

$$p\,dx + q\,dy = 0;$$

les lignes conjuguées L de ces caractéristiques sont données par l'équation

$$\delta p\,dx + \delta q\,dy = 0;$$

on a donc sur chacune d'elles

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta q}{q},$$

d'où

$$q = p.\alpha,$$

et utilisant l'équation (1), il vient, sous forme finie,

$$x^2 + z^2 = \alpha^2(y + z^2) \qquad (\alpha \text{ const.}). \tag{10}$$

Cette équation représente les cônes du second degré qui joignent l'origine aux lignes L; le lieu de ces courbes assujetties à passer par un point M est le cône (10) qui passe par ce point.

Prenons une surface S_1 et une surface S_2 d'équation respective

$$\frac{x + X}{y + Y} = f, \qquad \frac{x + X}{y - Y} = f_1, \tag{11}$$

f et f_1 fonctions de z, la première étant positive et la seconde négative. Pour que ces deux surfaces se coupent suivant une ligne L, il faut et il suffit que leur courbe d'intersection soit située sur le cône (10); nous avons donc à éliminer x, y, z, X, Y entre les équations homogènes (4), (10) et (11). L'élimination peut se faire de la manière suivante : calculer X et Y à l'aide de (11)

$$X = \frac{2ff_1 y - (f + f_1)x}{f + f_1},$$
$$Y = \frac{(f_1 - f)y}{f + f_1},$$

et remarquons que l'équation (10) s'écrit

$$X = \alpha Y;$$

nous déduisons

$$x(f + f_1) = [2ff_1 + \alpha(f - f_1)]y.$$

D'autre part,

$$Y^2 = y^2 + z^2$$

nous permet de calculer z^2,

$$z^2(f + f_1)^2 = -4ff_1 y^2,$$

et si l'on porte dans l'équation (10), nous trouverons la condition

$$ff_1 + \alpha(f - f_1) = 1. \tag{12}$$

Si l'on se donne une famille de surfaces S_1, déterminée par une forme positive f, ce qui revient à supposer que l'on puisse résoudre l'équation générale

$$0 = \varphi(a, z)$$

par rapport au terme

$$a = \frac{x + \sqrt{x^2 + z^2}}{y + \sqrt{y^2 + z^2}},$$

nous pouvons trouver une famille de surfaces S_2, telle que toute surface de la première coupe toute surface de la seconde suivant une ligne L; il suffira de prendre

$$f_1 = \frac{1 - \alpha f}{f - \alpha}.$$

Le problème est possible d'une infinité de manières, puisque α est une constante arbitraire.

Fixant arbitrairement une surface de la famille F, ce qui revient à se donner f, nous obtenons une infinité de surfaces de la famille F_1 qui coupent la première suivant les lignes conjuguées de ces caractéristiques.

4° Nous avons

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{y^2 + z^2}, & B &= \sqrt{z^2 + x^2}, \\ dy\,dz &= d\sigma \cos\alpha, & dz\,dx &= d\sigma \cos\beta, \end{aligned}$$

et l'intégrale I peut s'écrire

$$I = \int\int \frac{dy\,dz}{\sqrt{y^2 + z^2}} \pm \frac{dz\,dx}{\sqrt{z^2 + x^2}}.$$

Prenons pour trajectoire venant percer Σ, la caractéristique γ appartenant à l'équation (E_1); nous aurons

$$I = -\int\int dz \left(\frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} - \frac{dy}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right)$$

avec le choix du signe.

Découpons Σ à l'aide de plans parallèles au plan des xy; nous avons, en supposant z constant,

$$I = -\int \log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + z^2}}{y + \sqrt{y^2 + z^2}} \right) dz.$$

Or, en deux points correspondants pris sur une même caractéristique, l'élément différentiel de cette intégrale reste le même; donc I ne dépend pas de la fonction Σ qui sert de support aux caractéristiques; il faudra cependant que A et B ne soient ni nuls ni infinis, ce qui exige que la tangente à la caractéristique, $\tan g\varphi = \frac{A}{B}$, soit comprise entre deux limites positives ε et L; cela étant

$$I = \int_{z_0}^{l} \log \left(\frac{x + X}{y + Y} \right) dz$$

ou bien

$$(13) \qquad I = \int_{z_0}^{l} (u - v)\, dz \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \operatorname{arcsh} \frac{x}{z}, \\ v &= \operatorname{arcsh} \frac{y}{z} \end{aligned} \right.$$

et, intégrant par parties,

$$I = [zu + xu_1 - (zv + yv_1)]_{z_0}^{l}.$$

Soit une surface Σ, dont l'élément placé au point $M(x, y, z, p, q)$ a pour valeur

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Faisons la perspective de ces éléments en prenant le point O comme pôle et pour plan du tableau le plan parallèle au plan xOy mené par le point M; la section droite du petit cône de sommet O et de base $d\sigma$ a pour valeur

$$\frac{px+qy-z}{\mathrm{OM}.\sqrt{1+p^2+q^2}}\,d\sigma;$$

il en résulte que l'aire de la perspective a pour expression

$$\frac{px+qy-z}{z}\,dx\,dy.$$

Soit maintenant une surface fixe Σ_0, telle qu'en chacun de ses points passe une caractéristique, de sorte qu'on peut la supposer définie à l'aide des paramètres qui definissent la caractéristique γ.

Soit M_0 le point correspondant au point M; si nous écrivons que les aires des deux perspectives de $d\sigma$ et $d\sigma_0$ sont sur un plan parallèle au plan Oxy, mené par MM_0, nous obtenons l'équation

$$px+qy=p_0x_0+q_0y_0=\text{fonct.}(a, b).$$

De sorte que les surfaces Σ satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$(14)\qquad px+qy=\varphi(a, z),$$

a fonction homogène en x, y, z de degré zéro.

Les caractéristiques de cette nouvelle équation sont données par un système différentiel intégrable par quadratures.