NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. JUHEL-RÉNOY

Sur l'application des déterminants à la géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 258-263

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__258_0>

[K10e]

SUR L'APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE;

Par M. J. JUHEL-RÉNOY.

Dans une Note communiquée au *Bulletin des Sciences mathématiques élémentaires*, j'ai démontré le principe suivant :

Principe. — *Si une relation entière et rationnelle de degré n entre les distances d'un point variable* M *d'un cercle orienté à un certain nombre de points fixes, pris sur ce cercle ou dans son plan, telle que les degrés de tous ses termes par rapport aux distances variables aient la même parité et soient pairs par rapport aux distances aux points fixes non situés sur le cercle, est satisfaite pour $(n+1)$ positions, au moins, du point variable sur le cercle, elle est vraie pour une position quelconque du point sur le cercle orienté.*

Le but de la Note actuelle est l'application de ce principe à la démonstration des relations entre les distances mutuelles de n points d'un cercle à n points pris dans son plan, en particulier entre les distances respectives de n points d'un cercle, relation qui s'obtient d'habitude par la multiplication des déterminants dans le cas très spécial de quatre points. A ce sujet, l'application du principe nous permettra de démontrer que le degré de la relation connue peut être singulièrement abaissé, tout en conservant à cette relation sa forme habituelle; enfin, elle nous permettra d'atteindre des propositions plus étendues.

I. Considérons n points d'un cercle, $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_{n-1}, O_n$ et n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formant un autre groupe sur le même cercle. Nous nous proposons de démontrer qu'il existe, entre les distances mutuelles des points des deux groupes, la relation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} O_1A_1 & O_1A_2 & O_1A_3 & \ldots & O_1A_n \\ O_2A_1 & O_2A_2 & O_2A_3 & \ldots & O_2A_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ O_nA_1 & O_nA_2 & O_nA_3 & \ldots & O_nA_n \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, si l'on veut déterminer le point O_n, connaissant tous les autres par la relation donnée, *qui remplit toutes les conditions de l'énoncé,* étant homogène par rapport aux distances variables, on trouve qu'étant linéaire elle est vérifiée lorsque le point O_n se confond avec l'un des points $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_{n-1}$, c'est-à-dire pour $n-1$ positions du point variable. Elle est donc identique, en supposant $n-1 \geqq 2$ ou $n \geqq 3$.

Si l'on suppose, en particulier, que les points A se confondent respectivement avec les points O, on a une relation entre les distances mutuelles de n points d'un cercle sous la forme

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 0 & A_1A_2 & A_1A_3 & \ldots & A_1A_n \\ A_2A_1 & 0 & A_2A_3 & \ldots & A_2A_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_nA_1 & A_nA_2 & A_nA_3 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

relation dans laquelle il est bien entendu que

$$A_iA_k = -A_kA_i.$$

Dans le cas de $n=4$, on a la condition pour que quatre points soient sur un même cercle ; on voit que, si l'on convient d'écrire

$$A_iA_k = d_{ik},$$

elle affecte la forme suivante :

$$
(3) \qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0,
$$

curieuse en ce qu'elle est identique à *la forme* qu'on donne d'habitude et qui est due, d'après M. Salmon, à M. Cayley, tout en présentant avec cette relation la différence essentielle que dans la relation (3) d_{ik} représente *la distance* algébrique $A_i A_k$, et non son carré, comme dans la relation de M. Cayley : c'est l'expression même du théorème de Ptolémée.

On généralise immédiatement la relation (1) en l'étendant aux puissances p des distances mutuelles, ce qui donne la relation

$$
(4) \qquad \begin{vmatrix} \overline{O_1A_1}^p & \overline{O_1A_2}^p & \overline{O_1A_3}^p & \cdots & \overline{O_1A_n}^p \\ \overline{O_2A_1}^p & \overline{O_2A_2}^p & \overline{O_2A_3}^p & \cdots & \overline{O_2A_n}^p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{O_nA_1}^p & \overline{O_nA_2}^p & \overline{O_nA_3}^p & \cdots & \overline{O_nA_n}^p \end{vmatrix} = 0.
$$

Il suffit, pour l'exactitude de cette relation, que $(n-1)$ soit au moins égal à $(p+1)$, ou

$$
n \geqq p+2.
$$

La démonstration découle immédiatement de l'application du principe.

En particulier, la formule (3) applicable à quatre points d'un cercle donne la généralisation suivante :

$$
(5) \qquad \begin{vmatrix} 0 & (d_{12})^p & (d_{13})^p & (d_{14})^p \\ (d_{21})^p & 0 & (d_{23})^p & (d_{24})^p \\ (d_{31})^p & (d_{32})^p & 0 & (d_{34})^p \\ (d_{41})^p & (d_{42})^p & (d_{43})^p & 0 \end{vmatrix} = 0,
$$

avec la condition

$$4 \geqq p + 2$$

ou

$$p \leqq 2.$$

Le cas de $p = 2$ donne la formule de M. Cayley.

II. Considérons n cercles ayant pour rayons r_1, r_2, r_3, ..., r_n, et tangents à un $(n+1)^{\text{ième}}$ cercle en des points A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ce dernier cercle ayant pour rayon R.

On démontre bien facilement (*voir* SALMON, *Sections coniques*, Chapitre des *Systèmes de cercles*) qu'en représentant par $(i\text{K})$ la valeur algébrique de la tangente commune au $i^{\text{ième}}$ et au $k^{\text{ième}}$ cercle, on a

$$A_i A_k = \frac{\text{R}\,(ik)}{\sqrt{(\text{R} - r_i)(\text{R} - r_k)}}.$$

En remplaçant dans la relation (2) A_iA_k par cette expression, on a une relation entre les tangentes communes à n cercles, pris deux à deux, tangents à un $(n+1)^{\text{ième}}$ cercle :

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} 0 & (12) & (13) & (1n) \\ (21) & 0 & (23) & (2n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n1) & (n2) & (n3) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La relation (5) permet une application analogue ; en particulier, dans le cas de quatre cercles tangents à un cinquième, elle devient

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} 0 & (12)^p & (13)^p & (14)^p \\ (21)^p & 0 & (23)^p & (24)^p \\ (31)^p & (32)^p & 0 & (34)^p \\ (41)^p & (42)^p & (43)^p & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

en supposant p égal à 2 ou à 1. On trouve ainsi le théorème bien connu de M. Casey. La forme qui correspond au cas de $p = 2$ se trouve dans l'Ouvrage de M. Salmon (*loc. cit.*).

III. Considérons actuellement n points d'un cercle $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et n points dans le plan du cercle $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Il existe, entre les distances mutuelles des points du groupe O aux points du groupe A, la relation

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \overline{O_1A_1}^2 & \overline{O_1A_2}^2 & \overline{O_1A_3}^2 & \ldots & \overline{O_1A_n}^2 \\ \overline{O_2A_1}^2 & \overline{O_2A_2}^2 & \overline{O_2A_3}^2 & \ldots & \overline{O_2A_n}^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \overline{O_nA_1}^2 & \overline{O_nA_2}^2 & \overline{O_nA_3}^2 & \ldots & \overline{O_nA_n}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La démonstration est immédiate, la relation homogène et *du second degré* par rapport aux distances du point O_n aux n points A étant vérifiée pour $(n-1)$ positions du point O_n, supposé placé successivement en $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$.

Le cas particulier de $n = 4$ a été indiqué par Antomari dans les *Nouvelles Annales* (3^e série, t. I).

Si l'on suppose que O_1 coïncide avec A_1, O_2 avec A_2, ainsi de suite, on obtient une relation entre les distances mutuelles de n points d'un cercle

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} 0 & A_1A_2 & A_1A_3 & \ldots & A_1A_n \\ A_2A_1 & 0 & A_2A_3 & \ldots & A_2A_n \\ A_3A_1 & A_3A_2 & 0 & \ldots & A_3A_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_nA_1 & A_nA_2 & A_nA_3 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui est, d'ailleurs, un cas particulier de l'équation (4).

Signalons encore la généralisation suivante de la relation (8), tout à fait analogue à l'équation (4), avec cette hypothèse que p est nécessairement pair :

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \overline{O_1A_1}^p & \overline{O_1A_2}^p & \overline{O_1A_3}^p & \dots & \overline{O_1A_n}^p \\ \overline{O_2A_1}^p & \overline{O_2A_2}^p & \overline{O_2A_3}^p & \dots & \overline{O_2A_n}^p \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \overline{O_nA_1}^p & \overline{O_nA_2}^p & \overline{O_nA_3}^p & \dots & \overline{O_nA_n}^p \end{vmatrix} = 0.$$

IV. Remarquons, en terminant, que la simplification apportée par la relation (3), à la condition pour que quatre points soient sur un même cercle, s'applique aussi à la condition pour que trois points soient en ligne droite.

En effet, soient, sur un axe orienté, deux groupes de trois points M, N, P et A, B, C. On a, entre leurs distances mutuelles, la relation

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} MA & MB & MC & 1 \\ NA & NB & NC & 1 \\ PA & PB & PC & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui devient, en supposant les points M, N, P confondus respectivement avec A, B, C,

$$\begin{vmatrix} 0 & AB & AC & 1 \\ BA & 0 & BC & 1 \\ CA & CB & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou encore

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & 1 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 1 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$