BARRÉ

Étude sur les coniques polaires des cubiques planes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 241-257

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__241_0>

[M[1]5g]

ÉTUDE SUR LES CONIQUES POLAIRES DES CUBIQUES PLANES;

Par M. BARRÉ,
Capitaine du Génie.

I. Soit

$$(1)\quad \begin{cases} f(x,y,z) \equiv a\,x^3 + 3b\,x^2y + 3c\,xy^2 + d\,y^3 \\ \qquad + 3z\,(e\,x^2 + 2g\,xy + h\,y^2) \\ \qquad + 3\,z^2\,(k\,x + l\,y) + p\,z^3 = 0 \end{cases}$$

l'équation en coordonnées trilinéaires quelconques d'une cubique plane.

La conique polaire d'un point de coordonnées x_0, y_0, z_0 a pour équation

$$(2)\qquad x_0\frac{\partial f}{\partial x} + y_0\frac{\partial f}{\partial y} + z_0\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

ou encore

$$(3)\quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + 2\,xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \ldots + z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2} = 0.$$

II. Problème I. — *Étant donnée, dans le plan d'une cubique plane, une droite* D, *trouver à quelles conditions il existe dans ce plan un point dont la conique polaire, par rapport à la cubique, comprenne la droite* D.

Prenons un triangle de référence dont l'un des côtés soit précisément la droite D, que nous choisirons pour axe $z = 0$. Pour que la polaire d'un point $P(x_0, y_0, z_0)$ comprenne la droite D, il faut et il suffit évidemment qu'on ait

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}=0,$$

c'est-à-dire que le point P soit un point commun aux trois droites

$$(5)\quad ax+by+ez=0,\quad bx+cy+gz=0,\quad cx+dy+hz=0.$$

1° En général, le déterminant Δ des coefficients de x, y et z dans les équations (5) n'est pas nul et il n'y a pas de point répondant à la question.

2° Si Δ est nul sans que tous ses mineurs le soient, il existe un point P et un seul à distance finie ou infinie satisfaisant aux conditions du problème.

Il est à peu près évident que si Δ ne passe pas par un point double de la courbe, les tangentes à celle-ci aux points où elles rencontrent D passent par P. Si D est une tangente inflexionnelle, son point de contact répond à la question : c'est un cas limite de la disposition dont il vient d'être question.

Supposons que D passe par un point double. Prenons un triangle de référence dont ce point soit le sommet $y=0$, $z=0$; on doit avoir

$$a=b=e=0,$$

et Δ est identiquement nul. Donc :

Si D *passe par le point double d'une cubique unicursale, il existe toujours un point, unique en général, à distance finie ou infinie dont la conique polaire comprend la droite* D.

3° Δ est nul ainsi que ses mineurs, mais tous ses éléments ne sont pas nuls [1]. Il existe alors une infi-

---

[1] Si tous les éléments de Δ étaient nuls, la cubique se réduirait

nité de points, situés sur une droite D_1, répondant à la question. Prenons D_1 comme côté $y = 0$ du triangle de référence; les trois équations (5) doivent être vérifiées dès qu'on y fait $y = 0$. Ceci exige les conditions

$$a = b = c = e = g = h = 0.$$

L'équation de la cubique se réduit à

$$dy^3 + 3z^2(kx + ly) + pz^3 = 0. \tag{6}$$

C'est une cubique cuspidale dont D *est la tangente de rebroussement et* D_1 *la droite de jonction du rebroussement au point d'inflexion unique de la cubique.*

Réciproquement : *La conique polaire d'un point quelconque de la droite, qui joint le point de rebroussement d'une cubique cuspidale à son point d'inflexion, se décompose en deux droites dont la tangente de rebroussement.*

Ce résultat se démontre sans aucune difficulté en rapportant la cubique à un triangle de référence fourni par sa tangente de rebroussement, sa tangente d'inflexion et la droite qui joint le point d'inflexion au point de rebroussement.

III. Problème II. — *Trouver dans quels cas la conique polaire d'un point du plan d'une cubique plane peut se réduire à un faisceau formé de deux droites dont celle de l'infini.*

La solution de cette question est un corollaire immé-

à deux droites, dont une double. Nous laissons au lecteur le soin d'interpréter les résultats dans ce cas et d'une façon générale dans les divers cas de dégénérescence. Cette étude ne présente aucune difficulté et souvent aucun intérêt spécial.

diat de celle de la précédente. Il suffit de prendre pour droite D la droite de l'infini. Il suffira donc d'énoncer les résultats :

1. *Étant donnée une cubique plane, il n'y a pas, en général, de point dont la conique polaire se réduise à un faisceau de deux droites, dont celle de l'infini.*

2. *Lorsqu'il existe un point pour lequel ce fait se présente et que la cubique ne présente ni point double à l'infini, ni point parabolique inflexionnel, les trois asymptotes concourent en ce point. Inversement, si les trois asymptotes d'une cubique sont concourantes, leur point de concours répond à la question.*

3. *Dans le cas d'un point double à l'infini, à asymptotes distinctes, il existe un point et un seul, d'ailleurs à distance finie, répondant à la question.*

4. *Lorsque la cubique possède un point parabolique simple, inflexionnel, le point de contact de la cubique et de la droite de l'infini est le seul point répondant à la question.*

5. *Enfin, s'il existe sur la cubique un rebroussement parabolique, tous les points de la parallèle à la direction asymptotique unique menée par le point d'inflexion de la cubique répondent à la question.*

IV. Définitions et propriétés des points centraux. — *Considérons spécialement les cubiques dont les trois asymptotes ont un point commun au moins à distance finie.* (Cas 2° et 5° du numéro précédent.)

Nous donnerons à un pareil point le nom de POINT CENTRAL.

Cette dénomination est justifiée par les propriétés de ce point, propriétés dont nous allons exposer les principales.

1° Supposons qu'on ait rapporté la cubique à un système de coordonnées cartésiennes dont l'origine soit en un point central. Les équations (5) doivent être vérifiées pour $x = y = 0$. Les coefficients e, g, h doivent donc être nuls. L'inverse est évidemment vrai. Donc :

Théorème I. — *Si une cubique possédant un point central est rapportée à un système de coordonnées cartésiennes ordinaires dont ce point soit l'origine, l'equation de cette courbe ne contient pas de termes du second degré.*

Réciproquement : *Si l'équation cartésienne d'une cubique plane ne possède pas de termes du second degré, l'origine du système de coordonnées auquel est rapportée la cubique est un point central de celle-ci.*

2° En se fondant sur le théorème précédent, on obtient par une méthode classique le théorème suivant que je me borne à énoncer :

Théorème II. — *Le centre des moyennes distances des points d'intersection d'une cubique plane possédant un point central avec toute sécante passant par ce point coïncide avec lui.*

Réciproquement : *Si dans le plan d'une cubique plane il existe un point* (P) *tel que toute sécante qui y passe coupe la cubique en trois points dont le centre des moyennes distances coïncide avec le point* P, *celui-ci est un point central de la cubique.*

3° Si l'on exprime que la cubique passe par un point central pris comme origine des coordonnées, outre les conditions déjà obtenues ($e = g = h = 0$), on trouve $p = 0$. L'équation n'a plus que des termes impairs et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème III. — *Si une cubique plane possède un point central par lequel elle passe, ce point est un centre de la cubique.*

Réciproquement : *Le centre d'une cubique à centre est un point central de la cubique.*

Considérons, en particulier, le cas d'une cubique à rebroussement parabolique. Nous avons vu qu'une telle courbe possédait une ligne de points centraux, à savoir : la parallèle menée par le point d'inflexion de la cubique à sa direction asymptotique. De cette propriété et des théorèmes I et II on déduit immédiatement le théorème suivant facile à retrouver directement :

Théorème IV. — *Si une cubique plane admet un rebroussement parabolique, elle possède à distance finie un point d'inflexion qui est aussi un centre. Le centre des moyennes distances des points d'intersection de la cubique avec une sécante quelconque est toujours situé sur la parallèle à la direction asymptotique menée par le centre de la cubique.*

Observation. — Dans ce qui précède, on n'a fait aucune supposition sur la réalité des coefficients de la cubique. Désormais, nous limiterons notre étude aux cubiques réelles ; nous ferons remarquer que cette restriction n'est pas absolument nécessaire dans tout ce qui suit. Le lecteur fera aisément, lorsqu'il y aura lieu, les modifications à nos énoncés, nécessitées par la suppression de cette restriction.

V. Problème III. — *Déterminer les points du plan d'une cubique plane dont la conique polaire par rapport à la cubique soit un cercle.*

Soit

$$(1)\qquad f(x, y, z) \equiv ax^3 + 3bx^2y + \ldots + pz^3 = 0$$

l'équation homogène de la cubique rapportée à des axes rectangulaires, et α, β, γ les coordonnées homogènes du point dont nous étudions la conique polaire. Pour que celle-ci soit un cercle, il faut et il suffit évidemment que α, β et γ vérifient les relations

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,$$

autrement dit, que le point cherché appartienne à la fois aux deux droites représentées par les équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{llll} (a-c)x & +(b-d)y & +(e-h)z & = 0, \\ bx & +cy & +gz & = 0. \end{array}\right.$$

Discussion. — 1° Ces droites se coupant en général en un point à distance finie, il y a en général un point et un seul répondant à la question et situé à distance finie.

2° Si la condition

$$(4)\qquad (a-c)c = (b-d)b \quad \text{ou} \quad ac + bd = b^2 + c^2$$

est vérifiée, les droites (3) seront en général parallèles et distinctes, et il y aura un seul point à l'infini répondant à la question. Soient m_1, m_2, m_3 les cofficients angulaires des directions asymptotiques de la cubique; on trouve sans difficulté que la condition (4) équivaut à la suivante :

$$(5)\quad \begin{cases} 3m_1m_2m_3(m_1+m_2+m_3)+3\sum m_1m_2 \\ \quad =\left[\sum m_1\right]^2+\left[\sum m_1m_2\right]^2. \end{cases}$$

En prenant pour axe des x une parallèle à une direction asymptotique réelle de la cubique et désignant par m_1 celui des trois coefficients angulaires qui s'annule, la condition (5) se réduit à la suivante :

$$(6)\qquad (m_3+m_3)^2+m_2^2\,m_3^2=3m_2\,m_3.$$

Désignons sous le nom de courbes Γ *les courbes répondant à la définition représentée par la formule* (6). On voit que les courbes Γ ont nécessairement deux directions asymptotiques imaginaires, à moins que les directions asymptotiques ne soient toutes confondues : l'équation (6) ne peut, en effet, admettre comme seules solutions réelles que $m_2=m_3=0$.

Cas où il existe une direction asymptotique triple. — Elle est nécessairement réelle ; prenons pour axe Ox une parallèle à cette direction.

Les coefficients a, b, c doivent alors s'annuler, et, d'autre part, d restera différent de zéro, sans quoi la cubique se décomposerait en une conique et la droite de l'infini, hypothèse dont nous avons dit faire abstraction.

Les équations (3) se réduisent aux suivantes :

$$(7)\qquad -dy+(e-h)z=0,\qquad gz=0.$$

1° Si l'on suppose g différent de zéro, que e soit nul ou non [1], seul le point à l'infini de la courbe peut

[1] Si $e\neq 0$, point à l'infini simple parabolique et inflexionnel. Si $e=0$, point double avec une branche parabolique.

répondre à la question. Mais dans tous les cas le cercle correspondant dégénère en deux droites, dont celle de l'infini. Il n'y a donc pas en réalité de point dont la conique polaire soit un cercle.

2° Si l'on suppose g nul, tous les points de la première des droites représentées par l'équation (7) ont pour conique polaire un cercle.

Cette droite est d'ailleurs toujours à distance finie, puisqu'on suppose $d \neq 0$. Si e n'est pas nul, le point à l'infini est simple, mais parabolique et inflexionnel. Les polaires circulaires sont de vrais cercles en général. Il n'en est plus ainsi si e est nul. La courbe présente un rebroussement parabolique, la droite représentée par la première équation (7) se confond avec le lieu des points centraux et les polaires correspondant aux points de cette droite dégénèrent en deux droites, dont celle de l'infini.

3° Si la condition (4) est vérifiée, les droites (3) sont en général distinctes. Elles peuvent être confondues et nous venons d'en rencontrer un exemple : *il existe alors une droite de points dont la première polaire soit un cercle.* En faisant abstraction du cas que nous venons de signaler, on démontre que les cubiques Γ douées d'un point central possèdent seules une droite de points à première polaire circulaire. Je laisse au lecteur le soin d'établir ce résultat et me borne à énoncer le théorème suivant qui résume cette recherche :

Théorème V. — *Les cubiques* Γ *douées d'un point central et une classe de cubiques admettant à l'infini un point simple parabolique et inflexionnel sont les seules auxquelles correspond une infinité de points en ligne droite dont la conique polaire soit un cercle.*

VI. Problème IV. — *Déterminer les points du plan d'une cubique plane dont la première polaire soit une hyperbole équilatère.*

Adoptons les mêmes axes et les mêmes notations que dans le problème précédent. La condition caractéristique du problème actuel est

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = 0, \tag{1}$$

ou, en développant et remplaçant α et β par des coordonnées courantes x, y,

$$(a + c)x + (b + d)y + (e + h)z = 0. \tag{2}$$

Cette équation représentant une droite, il y a donc en général une infinité de points en ligne droite répondant à la question.

Discussion. — 1° La droite (2) est en général à distance finie; elle se réduit à la droite de l'infini si l'on a à la fois

$$(a + c) = 0, \qquad b + d = 0, \tag{3}$$

$$e + h \neq 0. \tag{4}$$

En spécialisant les axes comme dans le problème précédent, on peut supposer le coefficient angulaire m_1 nul et les équations (3) deviennent

$$m_2 + m_3 = 0, \qquad m_2 m_3 + 3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad m_2 = -m_3 = \pm\sqrt{3},$$

résultat qui s'interprète immédiatement : *Les directions asymptotiques sont parallèles aux trois côtés d'un triangle équilatéral.*

2° Si aux équations (3) on joint la relation

$$e + h = 0, \tag{5}$$

l'équation (2) devient une identité et la polaire de tout point du plan est une hyperbole équilatère. On vérifie sans aucune difficulté que l'ensemble des équations (3) et (4) entraîne l'existence d'un point central [1]. *Les trois asymptotes de la cubique forment donc les diamètres d'un hexagone régulier*. Je ne m'arrêterai pas non plus à vérifier que cette condition suffit. Les résultats précédents seront résumés par le théorème suivant :

Théorème VI. — *Dans le plan d'une cubique plane, il existe en général une infinité de points en ligne droite dont la conique polaire par rapport à la cubique soit une hyperbole équilatère.*

Dans le cas où les directions asymptotiques de la cubique sont parallèles aux côtés d'un triangle équilatéral, la droite qui vient d'être définie coïncide avec la droite de l'infini si les trois asymptotes ne sont pas concourantes.

Si les trois asymptotes de la cubique sont dirigées suivant les rayons d'un hexagone régulier, la conique polaire, par rapport à la cubique, de tout point du plan est une hyperbole équilatère.

VII. Problème V. — *Une cubique plane étant donnée, déterminer les régions de son plan dont les points aient pour première polaire par rapport à la cubique une ellipse ou une hyperbole et les points*

---

[1] Ce résultat est d'ailleurs évident en se reportant à ce qui a été établi plus haut : il y a au moins un point dont la première polaire soit un cercle ; or, ce point doit également avoir pour polaire une hyperbole équilatère. Ces deux conditions ne sont compatibles que si cette polaire se réduit à deux droites, dont celle de l'infini, c'est-à-dire si le point en question est un point central, puisque dans le cas actuel les directions asymptotiques sont simples.

du plan dont la première polaire soit une parabole.

Choisissons un système de coordonnées cartésiennes quelconques, et soient

$$(1)\quad f(xy) \equiv ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + 3(ex^2 + 2gxy + hy^2) + 3(kx + ly) + p = 0$$

l'équation de la cubique plane étudiée et α, β les coordonnées d'un point P. La conique polaire de ce point sera une ellipse si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 > 0,$$

une hyperbole si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 < 0,$$

une parabole si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2 = 0.$$

Nous savons qu'il y a dans le plan au moins un point à première polaire circulaire et une infinité de points dont la première polaire soit une hyperbole équilatère. Si donc la polaire circulaire ne dégénère pas en deux droites, dont celle de l'infini, il y aura nécessairement dans le plan deux régions, une dont les points ont une polaire du genre ellipse et l'autre du genre hyperbole. Le cas d'exception possible correspond à l'existence d'un point central, ou d'un point inflexionnel parabolique, ou d'un point double à l'infini.

Dans ces conditions, le système d'équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0$$

mises sous forme homogène admet une solution autre que $x = y = z = 0$, et les trois formes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ne sont pas indépendantes. Par suite, la conique lieu des points à polaire parabolique

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0$$

se réduit à deux droites. Inversement, si l'une des singularités visées plus haut ne se présente pas, les formes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont indépendantes et la conique (2) n'est pas dégénérée.

En rapprochant ces considérations des résultats du problème II, on obtient la proposition suivante :

Théorème VII. — *Le lieu des points du plan dont la conique polaire est une parabole est une conique réelle ou dégénérée. La dégénérescence en deux droites réelles ou imaginaires se produit lorsque la cubique possède soit un point central, soit un point double à l'infini ou un point d'inflexion parabolique.*

Cette conique divise le plan en deux régions dans chacune desquelles tous les points ont des coniques polaires appartenant au même genre.

Genre de la séparatrice. — En développant l'équation (2), on trouve sans aucune difficulté que la séparatrice sera du *genre ellipse* si

$$(ad - bc)^2 - 4(bd - c^2)(ac - b^2) < 0,$$

du *genre hyperbole* si

$$(ad - bc)^2 - 4(bd - c^2)(ac - b^2) > 0,$$

du *genre parabole* si

$$(ad - bc)^2 - 4(bd - c^2)(ac - b^2) = 0.$$

Si l'on remarque que le premier membre des relations précédentes est précisément le discriminant de la forme

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

on conclut immédiatement que :

La séparatrice est du genre ellipse lorsque la cubique possède trois directions asymptotiques simples réelles. Elle est du genre hyperbole si la cubique admet trois directions asymptotiques simples dont une seule réelle, du genre parabole si la cubique possède une direction asymptotique double.

Cas où la séparatrice se réduit à deux droites. — Nous passerons rapidement en revue les diverses hypothèses dans lesquelles cette dégénérescence peut se présenter.

1° *Cubique à point central.* — La séparatrice se réduit à deux droites se coupant en ce point. Ces droites sont réelles si la cubique ne présente qu'une seule direction asymptotique réelle ; elles sont imaginaires lorsque les trois directions asymptotiques de la cubique sont réelles. Dans ce dernier cas, la conique polaire d'un point quelconque du plan est du genre hyperbole.

2° *Cubique possédant à l'infini un point double.* — En prenant l'axe des x parallèle à la direction asymptotique double, on arrive, par des calculs faciles et que je laisse au lecteur le soin de développer, au résultat suivant :

Le lieu des points dont la conique polaire est du *genre parabole se réduit à une droite double parallèle à la direction asymptotique double. Cette droite est rejetée à l'infini si le point double de la cubique possède une branche parabolique. La polaire de tout autre point du plan est une hyperbole.*

Toutefois, *si ce point double à l'infini est un rebroussement parabolique, la polaire de tout point du plan est du genre parabole.*

3° *Cubique possédant un point simple parabolique et inflexionnel.* — Avec le même choix d'axes que dans le paragraphe précédent, on met facilement en évidence le résultat suivant :

La séparatrice se réduit à une droite simple. Mais le lieu des points dont la première polaire est du genre parabole comprend en outre la droite de l'infini (dont le rôle comme séparatrice est évidemment nul).

VIII. Pour mémoire, je me bornerai à rappeler la propriété classique suivante :

Le lieu des points du plan d'une cubique plane dont la première polaire se réduit à deux droites est la hessienne de la cubique.

IX. *Applications.* — 1. Les résultats signalés dans les études précédentes donnent immédiatement la solution des questions suivantes :

Examiner s'il existe dans le plan d'une cubique donnée et, s'il y a lieu, déterminer le nombre et la position des points satisfaisant à l'une des conditions suivantes :

1° *Les points de contact des tangentes à la cubique issues du point considéré se trouvent sur deux* *droites; cas où l'une de ces droites doit être la droite de l'infini;*

2° *Ces points de contact se trouvent sur un cercle;*

3° *Ces points de contact se trouvent sur une hyperbole équilatère;*

4° *Ces points de contact se trouvent sur une parabole.*

2. En combinant les divers résultats obtenus, on obtient la proposition suivante :

Théorème VIII. — *Il existe en général dans le plan d'une cubique plane :*

1° *Trois points en général distincts, dont un au moins réel, dont la première polaire se réduit à deux droites rectangulaires;*

2° *Six points réels ou imaginaires distincts en général, dont la première polaire se réduit à deux droites parallèles.*

Remarque. — Nous laissons au lecteur le soin de discuter dans quels cas le théorème précédent est en défaut et de modifier convenablement son énoncé.

3. Pour terminer cet exposé, il me paraît intéressant de présenter un exemple de cubique possédant les principales particularités signalées dans le cours de notre étude. J'adopterai la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

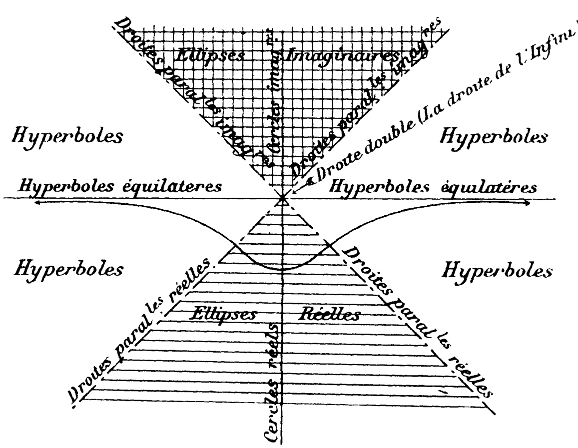
$$y^3 + 3x^2y + 1 = 0.$$

Elle jouit des propriétés suivantes que je ne m'arrêterai pas à établir :

1° Sa hessienne se réduit aux deux bissectrices des axes et à la droite de l'infini.

2° La conique polaire se réduit à un cercle pour tous les points de l'axe Oy, à une hyperbole équilatère pour ceux de Ox, à deux droites parallèles pour chacun des points des deux bissectrices, ces deux droites formant ainsi la séparatrice. L'origine est un point central; la polaire correspondante se réduira à une droite double, la droite de l'infini. Tous ces résultats peuvent s'obtenir par application des propositions générales rencontrées précédemment ou encore se vérifier directement sur l'équation de la polaire d'un point $P(x_0, y_0)$:

$$(x^2 + y^2)y_0 + 2xyx_0 + 1 = 0.$$



La figure ci-dessus résume toute la discussion.