P. CHARBONNIER

Sur la théorie des perturbations du pendule

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 220-238

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__220_1>

[R 7 f α]

SUR LA THÉORIE DES PERTURBATIONS DU PENDULE;

PAR M. LE COMMANDANT P. CHARBONNIER.

(SUITE ET FIN.)

IV. — LA FONCTION PERTURBATRICE DÉPEND DE L'ANGLE.

18. **Formules générales.** — On a, dans l'hypothèse où la fonction φ ne dépend que de l'angle θ, en remplaçant celui-ci par $-\alpha \cos kt$ dans les formules générales du n° 8, les expressions

$$\mathbf{E}_s = \int_0^t \varphi(-\alpha \cos kt) \sin kt \, dt,$$

$$\mathbf{E}_c = \int_0^t \varphi(-\alpha \cos kt) \cos kt \, dt.$$

1° La première se mettra sous la forme

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k\alpha} \int_{-\alpha}^{\theta} \varphi(\theta) \, d\theta,$$

et cette quadrature, qui est immédiate, montre que $E_s(\pi)$ ne pourra s'annuler que pour des cas particuliers de la fonction φ [pour $\varphi(\theta)$, fonction impaire, par exemple].

En général $E_s(\pi)$ n'est pas nul : *l'amplitude de l'oscillation sera, en général, modifiée.*

2° On écrira

$$E_c = \frac{1}{k^2\alpha}\int_0^\theta \varphi(\theta)\,d\theta',$$

d'où

$$E_c = \frac{1}{k^2\alpha}\left[\theta'\varphi(\theta) - \int_{-\alpha}^\theta \theta'\varphi'(\theta)\,d\theta\right].$$

Le premier terme du crochet s'annule pour $kt = \pi$. La forme du second montre qu'il ne sera nul que dans des cas particuliers de la fonction $\varphi(\theta)$.

En général, $E_c(\pi)$ ne sera pas nul : *la durée de l'oscillation sera modifiée.*

19. **Fonction monome. Angle.** — Soit $\varphi(\theta)$ supposé sous la forme monome θ^m. On aura

$$E_s = \frac{(-\alpha)^m}{k}\int^{kt} \cos^m kt \sin kt\, dkt,$$

d'où

$$E_s = \frac{(-\alpha)^m}{k}\,\frac{1}{m+1}\,(1 - \cos^{m+1} kt).$$

Donc, si *m est pair,* lorsqu'on fait $kt = \pi$ et $\cos kt = -1$, on aura

$$E_s(\pi) = \frac{\alpha^m}{k}\,\frac{2}{m+1}.$$

Si *m est impair,* on aura

$$E_s(\pi) = 0.$$

L'amplitude de l'oscillation sera donc modifiée si m est pair et conservée si m est impair.

Dans le premier cas, on aura (n° 9, 2°)

$$\Delta\alpha = -\frac{2\varepsilon}{m+1}\frac{\alpha^m}{k^2}.$$

20. **Fonction monome. Durée.** — La fonction E_c s'écrira

$$E_c = \frac{(-\alpha)^m}{k}\int_0^{kt}\cos^{m+1}kt\,dkt.$$

Posons

$$J_m = \int_0^y \cos^{m+1}y\,dy.$$

Comme au n° 15, on établira la formule de récurrence

$$(m+1)J_m = \sin y\cos^m y + mJ_{m-2}.$$

Mais

$$J_{-1} = y \qquad \text{et} \qquad J_0 = \sin y.$$

Pour $y = \pi$, on a

$$J_{-1}(\pi) = \pi \qquad \text{et} \qquad J_0(\pi) = 0.$$

Il en résulte que :

Si *m est pair*, on aura $J_m(\pi) = 0$: *la durée de l'oscillation ne sera pas modifiée;*

Si *m est impair, la durée de l'oscillation sera modifiée.*

Ainsi donc, ou l'*angle* ou la *durée* est modifiée, mais jamais simultanément l'un et l'autre.

Comme on a (n° 15)

$$J_m(\pi) = I_n(\pi),$$

on aura

$$J_m(\pi) = \pi\frac{1.3.5\ldots m}{2.4.6\ldots(m+1)}.$$

Il viendra donc (m impair)

$$\mathrm{E}_c(\pi) = -\frac{\alpha^m}{k}\pi\frac{1.3.5\ldots m}{2.4.6\ldots(m+1)}.$$

La variation de durée ΔT sera, d'après la formule générale du n° 9, donnée par l'expression

$$\Delta T = -\frac{\varepsilon\alpha^{m-1}}{k^3}\pi\frac{1.3.5\ldots m}{2.4.6\ldots(m+1)},$$

ou

$$\Delta T = -\frac{\varepsilon\alpha^{m-1}}{k^3}\mathrm{I}_m(\pi) \qquad (m \text{ impair}),$$
$$\Delta T = 0 \qquad (m \text{ pair}).$$

21. **Premier exemple : Second terme de la formule du pendule.** — 1° La formule (1) du n° 2 devient, dans l'hypothèse $l = \text{const.} = l_0$,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\sin\theta = 0,$$

qu'on a simplifiée (n° 3) pour obtenir le terme principal de la série en remplaçant le sinus par l'arc.

Conservons maintenant le second terme du sinus dont le développement est

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Il viendra alors

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta - \frac{1}{1.2.3}k^2\theta^3 = 0.$$

On aura donc un terme perturbateur égal à

$$-\frac{1}{1.2.3}k^2\theta^3.$$

2° La fonction E_s, qui a pour expression

$$\mathrm{E}_s = -\frac{\alpha^3}{k}\int_0^{kt}\cos^3 kt\sin kt\, dkt,$$

s'intégrera par la formule

$$\mathbf{E}_s = -\frac{\alpha^3}{4k}(1 - \cos^4 kt).$$

C'est le cas de *m impair* : $\mathbf{E}_s(\pi)$ sera nul; $\Delta\alpha = 0$.

3° Calculons la fonction

$$\mathbf{E}_c = -\frac{\alpha^3}{k}\int_0^{kt} \cos^4 kt\, dkt.$$

La formule de récurrence (n° 20)

$$(m+1)\,J_m = \sin y \cos^m y + m\,J_{m-2}$$

donnera

$$2\,J_1 = \cos y \sin y + J_{-1},$$
$$4\,J_3 = \cos^3 y \sin y + 3\,J_1.$$

Mais on a

$$J_{-1} = y;$$

donc

$$\int_0^y \cos^4 y\, dy = J_3 = \frac{1}{4}\cos y \sin y\left(\cos^2 y + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{8}y;$$

par suite

$$\mathbf{E}_c = -\frac{\alpha^3}{4k}\left[\cos kt \sin kt\left(\cos^2 kt + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}kt\right].$$

4° On aura alors, d'après les formules générales du n° 8, en faisant $\varepsilon = -\frac{k^2}{1.2.3}$, pour le deuxième terme du développement de la formule du pendule, l'expression

$$\theta = -\alpha \cos kt - \frac{1}{1.2.3.4}\frac{\alpha^3}{2}\sin kt\,(3kt + \sin kt \cos kt),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = k\alpha \sin kt - \frac{1}{1.2.3.4}$$
$$\times k\alpha^3\left[\frac{3}{2}kt\cos kt + \sin kt\,(2 + 3\cos^2 kt)\right].$$

5° Faisons $kt = \pi$ dans les termes en α^3. Celui de l'angle s'annule. Donc, *l'amplitude de l'oscillation n'est pas modifiée,* résultat évident *a priori.*

La parenthèse de $\frac{d\theta}{dt}$, pour $\cos kt = -1$, devient $-\frac{3}{2}\pi$ et, par suite, la vitesse s'annule pour une valeur

$$\sin kt = -\frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{1.2.3.4}\pi,$$

d'où

$$\Delta T = \frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{1.2.3.4}\frac{\pi}{k}.$$

La valeur ΔT prend donc la forme

$$\Delta T = \frac{1}{16}\alpha^2 T.$$

C'est le second terme, bien connu, de la formule qui donne la durée d'oscillation du pendule.

6° On peut vérifier que la formule générale démontrée ci-dessus (n° 20)

$$\Delta T = -\frac{\varepsilon\alpha^{m-1}}{k^3}\pi\frac{1.3.5\ldots m}{2.4.6\ldots(m+1)}$$

donne bien la même expression quand on y fait

$$m = 3 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = -\frac{k^2}{1.2.3}.$$

7° Au point le plus bas, on a (n° 9, 3°)

$$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{k^2\alpha}\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\Delta\theta'_m = -\varepsilon\mathbf{E}_s\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Comme

$$\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\alpha^3}{4k}\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}$$

et

$$\mathbf{E}_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\alpha^3}{4k},$$

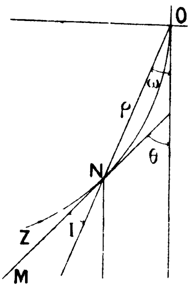
il viendra

$$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{32}\alpha^2 T,$$

$$\Delta\theta'_m = -\frac{\alpha^2\theta'_m}{1.2.3.4}.$$

22. Deuxième exemple : Pendule à enroulement de fil. — Prenons maintenant un exemple un peu plus complexe, où la longueur l du pendule variera.

Fig. 5.



1° Supposons que le fil MNO s'enroule sur une courbe OZ dont l'équation polaire sera

$$\rho = \beta l_0 \omega^2 (1 + A_1\omega + A_2\omega^2 + \ldots),$$

β étant un coefficient numérique.

La longueur du fil est actuellement l et sa longueur totale est

$$l_0 = l + \rho,$$

à un terme du troisième ordre en ω près, la corde étant substituée à l'arc.

La tangente en M fait avec le rayon vecteur ρ un angle I tel que

$$\tan g\, I = \frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)} = \frac{1}{2}\omega.$$

On a donc

$$I = \frac{1}{2}\omega$$

à un terme du troisième ordre près.

D'autre part

$$\theta = I + \omega = \frac{3}{2}\omega.$$

On aura alors

$$l = l_0 - \rho = l_0(1 - \beta\omega^2) = l_0\left(1 - \frac{4}{9}\beta\theta^2\right).$$

2° Il vient alors

$$\frac{1}{l_0}\frac{dl}{dt} = -\frac{8}{9}\beta\theta\frac{d\theta}{dt},$$

et nous porterons cette valeur dans l'équation du n° 2

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{l}\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

qui deviendra

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{16}{9}\beta\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{l_0}\theta\left(1 + \frac{4}{9}\beta\theta^2\right) = 0,$$

ce qui se réduit à

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta + \frac{4}{9}\beta\theta\left[k^2\theta^2 - 4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = 0.$$

Avec les relations

$$\theta = -\alpha \cos kt,$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha k \sin kt,$$

le terme perturbateur prend la forme

$$\frac{4}{9}\beta k^2\alpha^3 \cos kt(4 \sin^2 kt - \cos^2 kt$$

Dans les formules générales (8), on aura donc

$$\varepsilon = \frac{4}{9}\beta k^2 \alpha^3,$$

$$\varphi(t) = \cos kt(4 \sin^2 kt - \cos^2 kt).$$

3° Les deux intégrales $\mathbf{E}_s$ et $\mathbf{E}_c$ sont alors

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k}\int_0^{kt} \cos kt(4 - 5\cos^2 kt)\sin kt\, dkt,$$

d'où

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k}\left(2 - \frac{5}{4}\sin^2 kt\right)\sin^2 kt.$$

Puis

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k}\int_0^{kt} \cos^2 kt(4 - 5\cos^2 kt)\, dkt,$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k}(4\mathrm{J}_1 - 5\mathrm{J}_3),$$

et, d'après les formules du n° **21**, 3°,

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{8}kt + \cos kt \sin kt\left(\frac{1}{8} - \frac{5}{4}\cos^2 kt\right)\right].$$

Les équations du mouvement s'écriraient donc aisément.

4° Faisant $kt = \pi$, on voit que

$$\mathbf{E}_s(\pi) = 0,$$

$$\mathbf{E}_c(\pi) = \frac{1}{8}\frac{\pi}{k} = \frac{1}{8}\mathbf{T}.$$

L'amplitude de l'oscillation n'est donc pas modifiée.

La variation de la *durée d'oscillation,* d'après la formule générale (9), sera

$$\Delta\mathrm{T} = \left(\frac{4}{9}\beta k^2\alpha^3\right)\frac{1}{k^2\alpha}\frac{\mathrm{T}}{8} = \frac{1}{2.3.3}\beta\alpha^2\mathbf{T}.$$

C'est donc une formule tout à fait analogue à celle qui représente l'influence du second terme du sinus (n^o **21**, 5°).

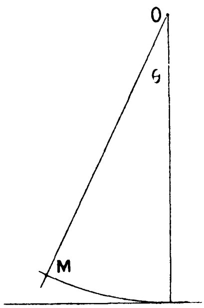
23. **Troisième exemple : Pendule cycloïdal.** — Quelle courbe doit-on faire décrire au point matériel M relié, par un fil toujours tendu, au point fixe O, pour que la durée d'oscillation soit celle du pendule simple

$$T = \frac{\pi}{k},$$

à un terme en α^5 près?

Il s'agit donc d'éliminer l'erreur due à l'omission du

Fig. 6.



terme en θ^3 dans le sinus, qui a produit (n^o **21**), une augmentation de durée

$$\Delta T = \frac{1}{16}\alpha^2 T.$$

Posons $l = l_0(1 + q\theta^2)$ comme équation polaire de la courbe cherchée; q est l'inconnue.

On aura

$$\frac{1}{l_0}\frac{dl}{dt} = 2q\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Il en résulte l'équation différentielle du n^o **22**, 2°, où l'on remplacera $-\frac{4}{9}\beta$ par q.

On a donc les mêmes conclusions que ci-dessus et l'on aura

$$\Delta T = -\frac{q}{8}\alpha^2 T.$$

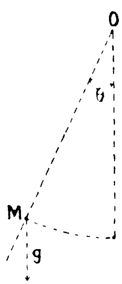
Donc, il suffira de prendre $q = \frac{1}{2}$ pour rendre *isochrones* les oscillations du pendule jusqu'aux termes en α^5 près.

V. — PENDULE AVEC FIL ÉLASTIQUE.

24. Tension du fil. — Nous supposons que le pendule est suspendu par un fil dont la totalité ou une partie seulement est élastique. Il s'allonge donc ou se raccourcit suivant la valeur de la *tension* due au mouvement du pendule.

Nous admettrons que l'allongement du fil est *sta-*

Fig. 7.



tique, c'est-à-dire qu'il suit exactement et immédiatement toutes les variations de la tension; cela exige, comme on sait, que la période vibratoire propre du fil élastique soit infiniment petite, relativement à la période T du pendule.

La tension du fil se compose de deux termes, l'un dû à la variation de la *composante de la gravité* suivant la direction θ du fil, l'autre dû à la force centrifuge.

Soit l_0 la longueur du fil, pour $\theta = 0$, lorsque le poids y est suspendu et au *repos*.

Pour un angle θ, la composante de la pesanteur suivant le fil est

$$mg\cos\theta.$$

La composante de la *force centrifuge* est

$$\frac{mv^2}{l}.$$

Donc, la *tension* du fil est

$$m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right).$$

Soient λ la longueur du fil quand le poids mg ne lui est pas suspendu, e le coefficient d'élasticité de la partie élastique du fil. On a, d'après la formule ordinaire,

$$l_0 = \lambda.\left(1 + \frac{mg}{e}\right)$$

et

$$l = \lambda\left[1 + \frac{m}{e}\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right)\right].$$

On aura donc

$$\frac{l}{l_0} = \frac{1}{1 + \frac{mg}{e}}\left[1 + \frac{m}{e}\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right)\right],$$

ce qui pourra, à l'approximation admise, s'écrire

$$\frac{l}{l_0} = 1 + \frac{m}{e + mg}\left(\frac{v^2}{l_0} - \frac{g\theta^2}{2}\right).$$

Exprimons de suite v et θ en fonction de t,

$$v = l_0\frac{d\theta}{dt} = l_0 k\alpha \sin kt,$$

$$\theta = -\alpha\cos kt.$$

Il vient

$$\frac{l}{l_0} = 1 + \frac{mg}{e + mg} \alpha^2 \left(\sin^2 kt - \frac{1}{2} \cos^2 kt \right).$$

25. **Équation du mouvement.** — On aura

$$\frac{1}{l_0} \frac{dl}{dt} = 3 \frac{mg}{e + mg} k \alpha^2 \sin kt \cos kt.$$

Portant dans l'équation

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{l} \frac{dl}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0,$$

on arrivera, après quelques réductions, à l'équation

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + k^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{mg}{e + mg} k^2 \alpha^3 \cos kt (15 \sin^2 kt - 1) = 0.$$

Dans les formules générales (9), on devra donc faire

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{mg}{e + mg} k^2 \alpha^3$$

et

$$\varphi(t) = (15 \sin^2 kt - 1) \cos kt.$$

26. **Fonctions $\mathbf{E}_s$ et $\mathbf{E}_c$.** — 1° On a

$$\mathbf{E}_s = \frac{15}{k} \int_0^{kt} \sin^3 kt \cos kt \, dkt - \frac{1}{k} \int_0^{kt} \cos kt \sin kt \, dkt,$$

d'où

$$\mathbf{E}_s = \frac{15}{4k} \sin^4 kt - \frac{1}{2k} \sin^2 kt.$$

2° On a

$$\mathbf{E}_c = \frac{14}{k} \int_0^{kt} \cos^2 kt \, dkt - \frac{15}{k} \int_0^{kt} \cos^4 kt \, dkt$$

ou

$$\mathbf{E}_c = \frac{14}{k} \mathrm{J}_1 - \frac{15}{k} \mathrm{J}_3$$

et, d'après les formules données (n° **21**, 3°),

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{4k}\left[\frac{11}{2}kt + \cos kt \sin kt\left(\frac{11}{2} - 15\cos^2 kt\right)\right].$$

3° D'après ces expressions, on aura

$$\mathbf{E}_s(\pi) = 0.$$

L'amplitude de l'arc n'est pas changée.

Puis

$$\mathbf{E}_c(\pi) = \frac{11}{8}\mathrm{T}.$$

D'après la formule générale (9) qui donne $\Delta\mathrm{T}$, il viendra

$$\Delta\mathrm{T} = \frac{11}{16}\,\frac{mg}{e+mg}\,\alpha^2\mathrm{T}.$$

C'est une formule du même genre que celles trouvées aux n^os **22** et **23**.

$\Delta\mathrm{T}$ est toujours positif : l'effet de l'élasticité s'ajoute donc à l'erreur commise en négligeant le terme en θ^3 du sinus.

VI. — PENDULE DE LONGUEUR VARIABLE.

27. Énoncé du problème. — Donnons maintenant un dernier exemple, où nous ferons intervenir le temps.

Un seau descend lentement dans un puits et oscille pendant que le câble s'enroule ou se déroule.

Trouver son mouvement, assimilé à celui d'un pendule simple de longueur variable ?

On suppose que le mouvement de déroulement se fait à *vitesse constante* et très lentement.

La longueur actuelle du câble est l et, l_0 étant la longueur à l'origine des temps, on a

$$l = l_0(1 + at),$$

a est la vitesse très petite de descente.

28. Équation du mouvement. — On a

$$\frac{dl}{dt} = al_0.$$

L'équation générale

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{l}\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

deviendra

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta + a\left(2\frac{d\theta}{dt} - k^2\theta t\right).$$

La fonction $\varphi(t)$ de la théorie générale dépend donc ici, à la fois, de l'arc θ, de la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ et du temps t.

Remplaçant θ par sa valeur principale $-\alpha\cos kt$, et $\frac{d\theta}{dt}$ par $\alpha k \sin kt$, on aura

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta + a\alpha k(kt\cos kt + 2\sin kt) = 0,$$

d'où

$$\varepsilon = a\alpha k \qquad \text{et} \qquad \varphi(t) = kt\cos kt + 2\sin kt.$$

29. Fonction $\mathbf{E}_s$. — On a

$$k\mathbf{E}_s = \int_0^{kt} kt\sin kt\cos kt\, dkt + 2\int_0^{kt} \sin^2 kt\, dkt.$$

En intégrant par parties,

$$k\mathbf{E}_s = \frac{kt}{2}\sin^2 kt + \frac{3}{2}\int_0^{kt}\sin^2 kt\, dkt.$$

Mais (n° 15)

$$\int_0^{kt}\sin^2 kt\, dkt = \frac{kt}{2} - \frac{1}{2}\cos kt\sin kt.$$

Donc

$$k\mathbf{E}_s = \frac{kt}{2}\sin^2 kt + \frac{3\,kt}{4} - \frac{3}{4}\cos kt \sin kt.$$

30. **Fonction $\mathbf{E}_c$.** — On a

$$k\mathbf{E}_c = \int_0^{kt} kt \cos^2 kt\, dkt + 2\int_0^{kt} \sin kt \cos kt\, dkt.$$

Mais (n° 20)

$$\int_0^{kt} \cos^2 kt\, dkt = \frac{kt}{2} + \frac{1}{2}\sin kt \cos kt.$$

Intégrant par parties, on aura

$$\begin{aligned} k\mathbf{E}_c &= \frac{kt}{2}(kt + \sin kt \cos kt) - \frac{1}{2}\int_0^{kt} kt - 3 \sin kt \cos kt)\, dkt \\ &= \frac{kt}{2}(kt + \sin kt \cos kt) - \frac{1}{4}(kt)^2 + \frac{3}{4}\sin^2 kt \end{aligned}$$

ou enfin

$$k\mathbf{E}_c = \frac{(kt)^2}{4} + \frac{3}{4}\sin^2 kt + \frac{kt}{2}\sin kt \cos kt.$$

31. **Équations du mouvement.** — Portant, dans les valeurs de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$, les expressions précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} \theta &= -\alpha \cos kt - \frac{1}{4}\frac{a\alpha}{k}[(kt)^2 \sin kt - 3\,kt \cos kt + 3 \sin kt], \\ \frac{d\theta}{dt} &= k\alpha\ \sin kt - \quad \frac{a\alpha}{4}[(kt)^2 \cos kt - \quad kt \sin kt]. \end{aligned}$$

32. **Durée de l'oscillation.** — D'après la formule générale (9)

$$\Delta \mathrm{T} = \frac{\varepsilon}{k^2 \alpha}\mathbf{E}_c(\pi),$$

en remarquant que

$$\mathbf{E}_c(\pi) = \frac{1}{k}\frac{\pi^2}{4}$$

et

$$\varepsilon = a\alpha k,$$

il viendra

$$\Delta T = \frac{a}{4} T^2.$$

On peut remarquer que la durée de l'oscillation $T + \Delta T$ correspond à celle d'un pendule dont la longueur serait $l = l_0\left(1 + a\frac{T}{2}\right)$, moyenne des deux longueurs aux deux extrémités de l'arc.

33. **Amplitude de l'arc.** — D'après la formule générale (9)

$$\Delta\alpha = -\frac{\varepsilon}{k} \mathbf{E}_s(\pi),$$

en remarquant que

$$\mathbf{E}_s(\pi) = \frac{3\pi}{4k}$$

et que

$$\varepsilon = a\alpha k,$$

il viendra

$$\Delta\alpha = -\frac{3}{4} a\alpha T.$$

34. **Point le plus bas.** — 1° Pour aller du point $-\alpha$ au point O, on a (n° 9, 3°) une *augmentation de durée*

$$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{k^2\alpha} \mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Mais

$$\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4k}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 3\right].$$

On aura donc

$$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{a}{4k^2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 3\right] = \frac{a}{4\pi^2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 3\right] T^2.$$

2° La *perte de vitesse* sera

$$\Delta\theta'_m = -\varepsilon \mathbf{E}_s\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

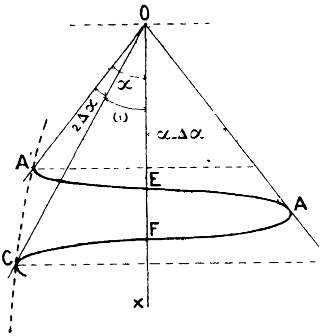
qui devient

$$\Delta\theta'_m = -\frac{5}{8} a\alpha\pi.$$

35. **Forme de la trajectoire.** — On démontrera aisément les propriétés suivantes :

1° La trajectoire part du point initial A′ tangentiellement à la droite OA′.

Fig. 8.



2° Elle coupe en E la verticale et présente en ce point une inflexion : la tangente n'est pas horizontale, mais inclinée vers la droite (composition de la vitesse horizontale du pendule et de la vitesse de descente du fil).

3° Au point A, d'amplitude $\alpha - \Delta\alpha$, la tangente est AO.

4° En F, point d'inflexion.

5° En C, la tangente est CO, qui fait avec Ox un angle $\alpha\left(1 - \frac{3}{2} a\mathrm{T}\right)$.

6° De A′ en C le fil s'est allongé de $2 l_0 a\mathrm{T}$, car on a

$$l = l_0(1 + 2a\mathrm{T}).$$

L'angle a diminué de $-\frac{3}{2} a\alpha\mathrm{T}$.

On peut donc, en coordonnées polaires (l, ω), écrire

$$dl = 2 a l_0 \mathrm{T},$$

$$d\omega = -\frac{3}{2} a \omega \mathrm{T}$$

et, par suite,

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{3}{2} \frac{dl}{l_0},$$

c'est l'équation différentielle de la courbe, lieu des points C.

On trouve

$$l = l_0 + \frac{2}{3} l_0 \operatorname{Log} \frac{\alpha}{\omega}$$

pour son équation.