NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BRICARD

Sur une propriété des quadriques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 21-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__21_1>

[L²10a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES QUADRIQUES HOMOFOCALES (1);

PAR M. R. BRICARD.

I. Je démontrerai tout d'abord le théorème suivant :

Soient (P), (Q) *deux quadriques,* D *et* E *deux droites fixes, tangentes communes à ces deux quadriques. Les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par* (P) *et* (Q) *déterminent sur* D *et* E *des divisions homographiques.*

Soit en effet

$$P + \gamma Q = 0$$

l'équation de l'une des quadriques (R) du faisceau considéré. (R) coupe D en deux points m et n, dont les distances à une origine fixe, choisie sur D, sont les racines d'une équation du second degré

$$A\mu^2 + 2B\mu + C = 0, \tag{1}$$

où A, B, C sont fonctions de λ. Ces fonctions sont linéaires. En effet, si l'on se donne μ, c'est-à-dire le point m par exemple, il existe dans le faisceau une quadrique unique contenant ce point.

De même la quadrique (R) coupe la droite E en

---

(1) L'original de cet article a paru en langue Esperanto, dans la revue *Internacia Scienca Revuo* (janvier 1907).

deux points m' et n' dont les distances à une origine fixe choisie sur E sont les racines d'une équation du second degré

$$A'\mu'^2 + 2B'\mu' + C' = 0, \tag{2}$$

où A', B', C' sont des fonctions linéaires de λ.

L'équation (1) a une racine double si λ vérifie la condition

$$B^2 - AC = 0. \tag{3}$$

Les racines de cette équation sont les valeurs de λ telles que la quadrique (R) touche la droite D. Mais par hypothèse (P) et (Q) touchent cette droite. Les racines de (3) sont donc 0 et ∞. On a, par suite, l'identité

$$B^2 - AC = K\lambda,$$

où K est une constante. On peut évidemment supposer cette constante égale à l'unité (sinon l'on multiplierait les coefficients A, B, C par un facteur convenable). Écrivons donc

$$B^2 - AC = \lambda.$$

Par le même raisonnement on trouve

$$B'^2 - A'C' = \lambda.$$

On a ensuite, en résolvant les équations (1) et (2),

$$\mu = \frac{-B + \sqrt{\lambda}}{A}, \qquad \mu' = \frac{-B' + \sqrt{\lambda}}{A'},$$

en choisissant par exemple le signe + devant chacun des radicaux qui figurent dans les expressions de μ et de μ'. L'élimination de $\sqrt{\lambda}$ entre les deux relations précédentes donne

$$A\mu + B = A'\mu' + B',$$

ou

$$\mu' = \frac{A\mu + B - B'}{A'}.$$

μ' est donc fonction rationnelle de μ et de λ. Mais λ lui-même est fonction rationnelle de μ; μ' est donc fonction rationnelle de μ. De même μ est fonction rationnelle de μ'. Il existe donc entre μ et μ' une relation homographique. C. Q. F. D.

II. Le théorème corrélatif du théorème précédent est le suivant :

Soient (P) et (Q) *deux quadriques,* D *et* E *deux droites fixes, tangentes communes à ces deux quadriques. Les plans tangents menés par* D *et* E *aux quadriques du faisceau tangentiel déterminé par* (P) *et* (Q) *engendrent deux faisceaux homographiques.*

Supposons en particulier que le faisceau tangentiel considéré contienne l'ombilicale. Le faisceau devient alors un système de quadriques homofocales. Dans les deux faisceaux de plans tangents menés par D et E aux quadriques du système, les plans isotropes se correspondent. Les deux faisceaux sont donc *égaux* et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Soient (P) *et* (Q) *deux quadriques homofocales,* D *et* E *deux droites fixes tangentes communes à ces deux quadriques. Les plans tangents menés par* D *et* E *aux diverses quadriques homofocales à* P *et* Q *engendrent deux faisceaux égaux.*

On peut dire aussi que, *si une droite* D *varie en touchant toujours* (P) *et* (Q), *les plans tangents menés par* D *aux diverses quadriques homofocales à* (P) *et* (Q) *forment un faisceau de grandeur constante.*

En particulier les plans tangents menés par D à (P) et à (Q) forment un dièdre de grandeur constante. Ce dièdre est en effet droit, comme il est bien connu. Notre proposition fournit ainsi une généralisation de ce théorème classique.

III. Supposons en particulier que D varie en touchant constamment la courbe commune à (P) et à (Q), c'est-à-dire une ligne de courbure de (P). Nous obtenons ce résultat :

Si l'on mène par une tangente variable à une ligne de courbure d'une quadrique (P) *des plans tangents aux diverses quadriques homofocales à* (P), *ces plans tangents forment un faisceau de grandeur constante.*

Plus particulièrement encore, les deux plans tangents menés à une même quadrique homofocale à (P) forment un dièdre de grandeur constante. Ce dernier théorème avait été obtenu par Mannheim, au cours de ses importantes recherches sur la surface de l'onde, et par des considérations entièrement différentes de celles qui précèdent (1).

IV. On obtient encore une conséquence intéressante en supposant que D varie en engendrant une surface développable dont l'arête de rebroussement appartient à (P). Cette arête de rebroussement est une ligne géodésique de (P), comme l'on sait. Une telle ligne géodésique jouit donc de la même propriété que les lignes de courbure, c'est-à-dire que :

Si l'on mène par une tangente variable à une

(1) *Proceedings of the Royal Society*, 1881; *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 435.

ligne géodésique d'une quadrique (P) *des plans tangents aux diverses quadriques homofocales à* (P), *ces plans forment un faisceau de grandeur constante.*

Ce théorème fournit une nouvelle interprétation de l'intégrale première de l'équation différentielle que vérifient les lignes géodésiques. Il est équivalent au célèbre théorème de Joachimsthal, relatif à ces lignes (1).

Il peut sembler étrange que les résultats établis dans cette Note ne soient pas connus. Mais je ne les ai rencontrés nulle part.