NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

SAMUEL CERVERA

Généralisation d'une question de Wolstenholme

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 216-220

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__216_1>

[I11a]

GÉNÉRALISATION D'UNE QUESTION DE WOLSTENHOLME;

PAR M. SAMUEL CERVERA,

Capitaine au 28e de ligne, Tarragone (Espagne).

M. C.-A. Laisant a proposé, dans son *Recueil de Problèmes de Mathématiques* (p. 18), la question suivante, déjà résolue dans les *Nouvelles Annales :*

Si x, y, z sont trois nombres positifs dont la somme est égale à l'unité, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z) > 8xyz \ (^1).$$

Cette proposition n'est qu'un cas particulier du théorème suivant :

Si x, y, z, ..., v sont m nombres positifs dont la somme est égale à l'unité, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z)\ldots(1-v) > (m-1)^m xyz\ldots v.$$

(1) WOLSTENHOLME, *Nouvelles Annales*, 1554.

Démonstration. — En effet

$$(m-1)^m xyz\ldots v = (m-1)x(m-1)y(m-1)z\ldots(m-1)v,$$

$$(m-1)x+(m-1)y+\ldots+(m-1)v$$
$$=(m-1)(x+y+z+\ldots+v)=m-1$$

et

$$(1-x)+(1-y)+(1-z)+\ldots+(1-v)$$
$$=m-(x+y+z+\ldots+v)=m-1.$$

Par la théorie des maxima et des minima, on sait que si nous décomposons le nombre $(m-1)$ en m de ses parties, et si nous multiplions celles-ci entre elles, elles nous donneront un produit maximum, quand leurs facteurs seront égaux à la $\frac{1}{m}$ partie de $(m-1)$; et, dès lors, des deux produits

$$(1-x)(1-y)(1-z)\ldots(1-v),$$
$$(m-1)x(m-1)y(m-1)z\ldots(m-1)v,$$

qui ont m facteurs et dont la somme est $(m-1)$, le majeur des deux sera celui dont les facteurs m seront moins inégaux, puisque le produit le plus grand correspondrait au cas où ils seraient égaux à la $\frac{1}{m}$ partie de la somme $(m-1)$.

Les différences entre ces facteurs pris de deux en deux sont :

Pour le premier produit

$$(1-x)-(1-y)=y-x,$$
$$(1-x)-(1-z)=z-x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$(1-y)-(1-x)=x-y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$(1-v)-(1-x)=x-v,$$
$$(1-v)-(1-y)=y-v,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

Pour le second produit

$$(m-1)y-(m-1)x=(m-1)(y-x),$$
$$(m-1)z-(m-1)x=(m-1)(z-x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(m-1)x-(m-1)y=(m-1)(x-y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(m-1)x-(m-1)v=(m-1)(x-v),$$
$$(m-1)y-(m-1)v=(m-1)(y-v).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ceci nous démontre que les différences $(y-x)$, $(z-x)$, ... sont précisément $m-1$ autant de fois plus petites que les différences $(m-1)$ $(y-x)$, $(m-1)$ $(z-v)$, ...

D'où il s'ensuit :

$$(1-x)(1-y)(1-z)\ldots(1-v)$$
$$>(m-1)x(m-1)y(m-1)z\ldots(m-1)v$$

ou

$$(1-x)(1-y)(1-z)\ldots(1-v)>(m-1)^m xyz\ldots v,$$

précisément ce que nous voulions démontrer.

Corollaire. — *Si $x=y=z=\ldots=v$ sont m nombres positifs égaux à la $\frac{1}{m}$ partie de l'unité, on a*

$$(1-x)^m=(m-1)^m x^m,$$

puisque les différences

$$y-x=0=(m-1)(y-x)\ \ldots,$$

les produits

$$(1-x)(1-x)\ldots(1-x)=(1-x)^m,$$
$$(m-1)x(m-1)x\ldots(m-1)x=(m-1)^m x^m$$

seront égaux.

Remarquez aussi que

$$1-x=1-\frac{1}{m}=\frac{m-1}{m}=(m-1)\,\frac{1}{m}=(m-1)\,x,$$

ce qui prouve que

$$(1-x)^m=(m-1)^m\,x^m.$$

Si $m=1$, on a

$$x=1,\ \ldots,\ 1-x=0\,x \qquad \text{(corollaire)}.$$

Remarque :
Si $m=2$, on a

$$x+y=1,\ \ldots,\ (1-x)(1-y)>1^2\,ry \qquad \text{(théorème)},$$
$$(1-x)(1-y)>xy.$$

Si $m=2$, $x=y$, on a

$$2x=1,\ x=\frac{1}{2},\ \ldots,\ (1-x)^2=x^2,\ \ldots,\ \left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Si $m=3$, on a

$$x+y+z=1,\ \ldots,\ (1-x)(1-y)(1-z)>2^3xyz=8xyz\ \text{[1]}.$$

Si $m=4$, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z)(1-s)>81\,xyzs.$$

Etc.

Exemple :

$$0,35+0,25+0,40=1.\ \left\{\begin{array}{l}1-0,35=0,65\\ 1-0,25=0,75\\ 1-0,40=0,60\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}(0,35.0,25.0,40)\times 8 & \\ \quad =(2.0,35)(2.0,25)(2.0,40)=0,28 & \\ 0,65.0,75.0,60 & =0,2925\end{array}\right\}\ 0,2925>0,28.$$

[1] Wolstenholme, *Nouvelles Annales*, 1554.

Remarque :

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}75 - 0{,}65 = 0{,}10, \ \dots, \ 2\,(0{,}35) - 2\,(0{,}25) = 0{,}20 = 2\,(0{,}10) \\ 0{,}75 - 0{,}60 = 0{,}15, \ \dots, \ 2\,(0{,}40) - 2\,(0{,}25) = 0{,}30 = 2\,(0{,}15) \\ 0{,}65 - 0{,}60 = 0{,}05, \ \dots, \ 2\,(0{,}40) - 2\,(0{,}25) = 0{,}10 = 2\,(0{,}05) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0{,}75 + 0{,}65 + 0{,}60 = 2. \\ 0{,}70 + 0{,}50 + 0{,}80 = 2. \end{array}\right\}$$

et cependant :

$$0{,}75 . 0{,}65 . 0{,}60 > 0{,}70 . 0{,}50 . 0{,}80 = 2^3 . 0{,}35 . 0{,}25 . 0{,}40.$$

Si $x = y = z$

$$3x = 1, \ x = \frac{1}{3}, \ 1 - x = \frac{2}{3} \ \dots, \ \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^3, \ \frac{8}{27} = 8 . \frac{1}{27}.$$