Nouvelles annales de mathématiques

A. Deltour

Continuants : applications à la théorie des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 172-188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__172_1>

[123a]

CONTINUANTS : APPLICATIONS A LA THÉORIE DES NOMBRES ;

PAR M. A. DELTOUR.

(SUITE.)

RÉDUCTION D'UN CONTINUANT DE FORME GÉNÉRALE.

25. Les considérations exposées précédemment se rapportent exclusivement aux continuants assujettis aux conditions indiquées au n° 2 ($b_h = -c_h = 1$) et qu'on pourrait appeler *continuants normaux*.

Ceux-ci forment une classe particulière de continuants caractérisée par le système de valeurs attribuées aux éléments b et c.

Il importe de montrer que la restriction ainsi apportée à la notion primitive ne diminue qu'en apparence la généralité des questions relatives aux continuants et que la forme indiquée au n° 1 se ramène à celle du n° 2.

26. *Tout continuant* M_1 *où les éléments* b_h, c_h *ont des valeurs quelconques* (*forme du n°* 1) *se transforme, à un facteur près* D_k, *en un continuant normal* M *de même ordre : si l'on pose* $-b_h c_h = d_h$, *le facteur* D_k *est un produit de termes tels que* d_h.

Pour faire cette transformation, il faut réduire à l'unité les éléments b et $-c$ du déterminant du n° 1.

On posera, pour toute valeur de h,

$$-c_h = c'_h$$

et

$$b_h c'_h = d_h.$$

Divisons successivement les éléments :

De la 2ᵉ colonne par b_1,
» 3ᵉ » $\dfrac{b_2}{c'_1}$,
» 4ᵉ » $\dfrac{b_3 b_1}{c'_2}$,
.....................,
» hᵉ » $\dfrac{b_{h-1} b_{h-3} \dots}{c'_{h-2} c'_{h-4} \dots}$,
.............................,

De la 2ᵉ ligne par c'_1,
» 3ᵉ » $\dfrac{c'_2}{b_1}$,
» 4ᵉ » $\dfrac{c'_3 c'_1}{b_2}$,
.....................,
» hᵉ » $\dfrac{c'_{h-1} c'_{h-3} \dots}{b_{h-2} b_{h-4} \dots}$,
....

Le déterminant M_1 sera lui-même divisé :

Après la 1ʳᵉ opération par d_1,
» 2ᵉ » $\dfrac{d_2}{d_1}$,
» 3ᵉ » $\dfrac{d_3 d_1}{d_2}$,
.........................,
» $(h-1)$ᵉ » $\dfrac{d_{h-1} d_{h-3} \dots}{d_{h-2} d_{h-4} \dots}$,
....

et dans l'ensemble par $D_k = d_{k-1} d_{k-3} \dots$.

Le déterminant M_1 devient le continuant

$$M = \left(a_1, a_2 \frac{1}{d_1}, a_3 \frac{d_1}{d_2}, a_4 \frac{d_2}{d_3 d_1}, \ldots, a_h \frac{d_{h-2} d_{h-4} \ldots}{d_{h-1} d_{h-3} \ldots}, \ldots, a_k \frac{d_{k-2} \ldots}{d_{k-1} \ldots}\right).$$

On a donc

$$\text{(VII)} \qquad M_1 = D_k M.$$

27. *On donne à* M *une forme symétrique* M′ *en employant le procédé de transformation du* n° 16 (*Remarque*).

Il y a lieu de distinguer deux cas, suivant la parité de k.

Supposons-le d'abord pair et posons

$$d_h = e_h^2,$$

$$t = \frac{e_{k-2} e_{k-4} \ldots}{e_{k-1} e_{k-3} \ldots}.$$

Les éléments de M′ que nous représenterons par a'_h ont pour valeur

$$a'_1 = a_1 t,$$

$$a'_2 = \left(a_2 \frac{1}{d_1}\right) \frac{1}{t},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a'_{2h} = a_{2h} \frac{e_{k-1} e_{k-3} \ldots e_{2h+1} \cdot e_{2h-2} e_{2h-4} \ldots e_2}{e_{k-2} e_{k-4} \ldots e_{2h} \cdot e_{2h-1} e_{2h-3} \ldots e_1},$$

$$a'_{2h+1} = a_{2h+1} \frac{e_{k-2} e_{k-4} \ldots e_{2h+2} \cdot e_{2h-1} e_{2h-3} \ldots e_1}{e_{k-1} e_{k-3} \ldots e_{2h+1} \cdot e_{2h} e_{2h-2} \ldots e_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La formule (VII) devient

$$M_1 = D_k M'.$$

Par exemple, pour $k=6$,

$$\mathrm{M}_1 = d_5 d_3 d_1 \left(a_1,\ a_2\frac{1}{d_1},\ a_3\frac{d_1}{d_2},\ a_4\frac{d_2}{d_3 d_1},\ a_5\frac{d_3 d_1}{d_4 d_2},\ a_6\frac{d_4 d_2}{d_5 d_3 d_1}\right)$$

$$= e_5^2 e_3^2 e_1^2 \left(a_1\frac{e_4 e_2}{e_5 e_3 e_1},\ a_2\frac{e_5 e_3}{e_4 e_2 e_1},\ a_3\frac{e_4 e_1}{e_5 e_3 e_2},\right.$$

$$\left. a_4\frac{e_5 e_2}{e_4 e_3 e_1},\ a_5\frac{e_3 e_1}{e_5 e_4 e_2},\ a_6\frac{e_4 e_2}{e_5 e_3 e_1}\right).$$

En second lieu, si k est impair, posons

$$t = \mathrm{D}_{k-1} = d_{k-2} d_{k-4} \ldots,$$

et divisons M par t; on obtiendra pour les éléments de M′ les valeurs

$$a'_1 = a_1\frac{1}{t},$$

$$a'_2 = \left(a_2\frac{1}{d_1}\right) t,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a'_{2h} = a_{2h}.d_{k-2}.d_{k-4}\ldots d_{2h+1}.d_{2h-2}d_{2h-4}\ldots d_2,$$

$$a'_{2h+1} = a_{2h+1}\frac{1}{d_{k-2}d_{k-4}\ldots d_{2h+1}.d_{2h}d_{2h-2}\ldots d_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La formule (VII) devient alors

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{D}_k \mathrm{D}_{k-1} \mathrm{M}'.$$

Par exemple, pour $k=5$, on a

$$\mathrm{M}_1 = d_4 d_3 d_2 d_1 \left(\frac{a_1}{d_3 d_1},\ a_2 d_3,\ \frac{a_3}{d_3 d_2},\ a_4 d_2,\ \frac{a_5}{d_4 d_2}\right).$$

28. Réciproquement, *un continuant normal* M *se transforme en un continuant* M_1 *de même ordre dans lequel les éléments b et c appartiennent à un système de valeurs donné.*

La formule (VII) dans laquelle les valeurs d_h sont connues permet, en effet, de déterminer un élément quelconque a_h de M_1 au moyen de l'élément correspondant de M.

Comme conséquence, un continuant formé au moyen d'un système déterminé de valeurs des éléments b et c (les a restant variables) se transforme, à un facteur près, en un continuant formé au moyen d'un système donné d'éléments b et c différent du premier.

Tout continuant peut donc se ramener à ce dernier pris comme type.

Le système dans lequel on a

$$\begin{cases} b_h = 1, \\ c_h = -1, \end{cases}$$

ou plus simplement $d_h = 1$, a été choisi de préférence parce que tous les termes du développement sont positifs et les coefficients par rapport aux éléments a_h égaux à $+1$.

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES CONTINUANTS ALTERNÉS

29. Dans certains cas, on trouve avantage à écrire les continuants dans le système qui correspond à l'hypothèse

$$d_h = -1.$$

Si M_1 est un tel continuant, les expressions D_k et M de la formule (VII) ont pour valeurs

$$\begin{cases} D_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}, \\ M = (a_1, -a_2, a_3, -a_4, \ldots, (-1)^{k-1} a_k), \end{cases}$$

c'est-à-dire que M_1 se transforme en un continuant normal dont les éléments sont les éléments a de M_1 affectés alternativement des signes $+$ et $-$.

Les continuants M_1 pour lesquels $d_h = -1$ seront désignés sous le nom de *continuants alternés*.

30. *Notation.* — Pour les représenter, il sera commode d'employer le symbole des imaginaires.

En appliquant à l'expression précédente de M le procédé de transformation du n° 16 (*Remarque*), pour $t = i$, M_1 se trouve représenté de la manière suivante :

$$M_1 = i^{3k}(ia_1, ia_2, ia_3, \ldots, ia_k).$$

La suite $a_1, a_2, \ldots, a_k$ étant désignée par α, la suite $ia_1, ia_2, \ldots, ia_k$ sera désignée par $\iota\alpha$.

On écrira donc

$$\text{(VIII)} \qquad M_1 = i^{3n_\alpha}(i\alpha).$$

Remarque. — Il résulte de ce qui précède (n^{os} 29 et 30) qu'on a

$$\text{(IX)} \qquad (i\alpha') = i^{n_\alpha^2}(\alpha),$$

en désignant par α' la suite α dont les éléments de rang pair ont changé de signe.

31. *Transformation d'un continuant alterné par l'introduction de suites correspondant à* $\theta, \theta', \eta, \eta'$. — De leur mode de représentation (n° 30) découlent les propriétés des continuants alternés sur lesquelles il est inutile d'insister et dont une seule sera mise ici en évidence.

Soient λ une des suites $\theta, \theta', \eta, \eta'$; λ' la même suite dont les éléments de rang pair ont changé de signe.

On a, d'après (IX),

$$\left\{\begin{aligned} (i\lambda') &= i^{n_\lambda^2}(\lambda), \\ (i\lambda'_{1,1}) &= i^{n_\lambda^2}(-\lambda_{1,1}), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} (i\lambda'_{0,1}) &= i^{(n_\lambda-1)^2}(\lambda_{0,1}) &= 0, \\ (i\lambda'_{1,0}) &= i^{(n_\lambda-1)^2}(-\lambda_{1,0}) &= 0. \end{aligned}\right.$$

Si λ est du type θ ou θ', n_λ est pair, et l'on a

$$(-\lambda_{1,1}) = (\lambda_{1,1}) = (\lambda).$$

Si λ est du type η ou η', n_λ est impair et l'on a

$$(-\lambda_{1,1}) = -(\lambda_{1,1}) = (\lambda).$$

Dans tous les cas, on trouve

$$(i\lambda'_{1,1}) = (i\lambda').$$

On a, par conséquent, les valeurs suivantes :

	$(i\lambda')$.	$(i\lambda'_{1,1})$.	$(i\lambda'_{0,1})$.	$(i\lambda'_{1,0})$.
Pour $\lambda = \theta$	1	1	0	0
» θ'	-1	-1	0	0
» η	i	i	0	0
» η'	$-i$	$-i$	0	0

La formule T_2 (n° 11) appliquée à un continuant tel que $(i\alpha, i\lambda', i\beta)$ donne

$$(X) \qquad (i\alpha, i\lambda', i\beta) = (i\lambda')(i\alpha, i\beta),$$

où $(i\lambda')$ prend dans le second membre l'une des valeurs ± 1, $\pm i$.

A ce facteur près, la valeur d'un continuant n'est pas modifiée par l'introduction d'une suite $i\lambda'$ entre deux de ses éléments.

Remarque. — Les calculs du n° 23 restent applicables lorsqu'on y remplace (λ) par $(i\lambda')$ et qu'on pose $(\mu) = (1\mu')$, puisque les éléments considérés sont des quantités quelconques et peuvent en particulier admettre i comme facteur.

Or, comme on vient de le voir, on a toujours $(i\lambda') = (i\lambda'_{1,1})$.

Les propositions des n^{os} 23 et 24 se résument par conséquent en celle-ci : *quel que soit le type auquel* *appartient* $(i\lambda')$, *les continuants obtenus par permutation circulaire des éléments de* $(i\lambda')$ *appartiennent au même type.*

L'adjoint $((i\lambda')$ a l'une des valeurs ± 2, $\pm 2i$.

CONTINUANTS DONT LES ÉLÉMENTS SONT ASSUJETTIS A CERTAINES CONDITIONS.

32. On conçoit qu'en imposant aux éléments certaines conditions, les principes exposés précédemment conduisent à des formules nombreuses et variées suivant les hypothèses faites.

En voici quelques exemples :

33. I. *Continuants composés de suites périodiques.* — Considérons un continuant normal $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ dans lequel une suite quelconque d'éléments α est répétée périodiquement.

Représentons-le par (α^m), m étant le nombre des périodes, et de même représentons $(\alpha_{u,0}, \alpha, \ldots, \alpha, \alpha_{0,v})$ par $(\alpha^m_{u,v})$. [m, u, v étant des nombres entiers positifs.]

Considérons les deux adjoints $((\alpha^m)$ et $((\alpha^m, \gamma_1)$; posons

$$(\mathrm{B}_1)\qquad \begin{cases} \dfrac{i^{mn_\alpha}((\alpha^m, \gamma_1)}{2}\, g = \mathrm{P}_m, \\[2ex] \dfrac{i^{mn_\alpha}((\alpha^m)}{2} = \mathrm{Q}_m; \end{cases}$$

dans la première égalité, la valeur de g est donnée par l'expression

$$g^2 = \frac{4(-1)^{n_\alpha} - ((\alpha)^2}{((\alpha, \gamma_1)^2},$$

qu'on peut écrire (n^os^ **19** et **22**)

$$g^2 = \frac{-4\alpha_{0,1}\alpha_{1,0} - ((\alpha, \gamma_1)^2}{((\alpha, \gamma_1)^2} = \frac{-4\alpha_{0,1}\alpha_{1,0}}{((\alpha, \gamma_1)^2} - 1.$$

34. Les fonctions P_m, Q_m définies ci-dessus jouissent de la propriété suivante :

P_m et Q_m *ont avec* P_1 et Q_1 *les mêmes relations que* $\sin mx$ et $\cos mx$ *avec* $\sin x$ et $\cos x$, *x étant quelconque,* savoir :

$$(B_2)\qquad \begin{cases} P_m = P_{m-1}Q_1 + Q_{m-1}P_1, \\ Q_m = Q_{m-1}Q_1 - P_{m-1}P_1, \end{cases}$$
$$P_m^2 + Q_m^2 = 1.$$

La dernière est, du reste, la conséquence des deux autres, puisqu'on a, en tenant compte de l'expression de g,

$$P_1^2 + Q_1^2 = 1.$$

Pour démontrer la première, remplaçons les P et Q par leurs valeurs tirées de (B_1). Après avoir éliminé le facteur commun $\dfrac{i^{mn_\alpha}}{4}g$, cette relation devient

$$2((\alpha^m, \eta) = ((\alpha^{m-1}, \eta)((\alpha) + ((\alpha^{m-1})((\alpha, \eta).$$

Or, le second membre a pour valeur

$$[(\alpha^{m-1}) - (\alpha_{1,1}^{m-1})][(\alpha) + (\alpha_{1,1})]$$
$$+ [(\alpha^{m-1}) + (\alpha_{1,1}^{m-1})][(\alpha) - (\alpha_{1,1})]$$

et devient, après réduction,

$$2(\alpha)(\alpha^{m-1}) - 2(\alpha_{1,1})(\alpha_{1,1}^{m-1})$$
$$= 2[(\alpha)(\alpha^{m-1}) + (\alpha_{0,1})(\alpha_{1,0}^{m-1})] - 2[(\alpha_{1,0}^{m-1})(\alpha_{0,1}) + (\alpha_{1,1}^{m-2})(\alpha_{1,1})]$$
$$= 2(\alpha^m) - 2(\alpha_{1,1}^m)$$
$$= 2((\alpha^m, \eta).$$

La seconde des relations (B_2) devient de même, après élimination du facteur commun $\dfrac{i^{mn_\alpha}}{4}$,

$$2((\alpha^m) = ((\alpha^{m-1})((\alpha) - ((\alpha^{m-1}, \eta)((\alpha, \eta)g^2$$
$$= ((\alpha^{m-1})((\alpha) + ((\alpha^{m-1}, \eta)((\alpha, \eta) + \frac{4\alpha_{0,1}\alpha_{1,0}((\alpha^{m-1}, \eta)}{((\alpha\eta)}.$$

De l'identité

$$(\alpha^m_{1,0}) = (\alpha^{m-1}_{1,0})(\alpha) + (\alpha^{m-1}_{1,1})(\alpha_{1,0}) = (\alpha_{1,0})(\alpha^{m-1}) + (\alpha_{1,1})(\alpha^{m-1}_{1,0}),$$

on déduit

$$\alpha_{1,0}[(\alpha^{m-1}) - (\alpha^{m-1}_{1,1})] = (\alpha^{m-1}_{1,0})[(\alpha) - (\alpha_{1,1})],$$

c'est-à-dire

$$\alpha_{1,0}((\alpha^{m-1}, \eta) = (\alpha^{m-1}_{1,0})((\alpha, \eta).$$

L'égalité ci-dessus devient alors

$$2((\alpha^m) = ((\alpha^{m-1})((\alpha) + ((\alpha^{m-1}, \eta)((\alpha, \eta) + 4\alpha_{0,1}(\alpha^{m-1}_{1,0}).$$

Or, on a

$$\begin{aligned} 2(\alpha^m) &= 2(\alpha)(\alpha^{m-1}) + 2(\alpha_{0,1})(\alpha^{m-1}_{1,0}), \\ 2(\alpha^m_{1,1}) &= 2(\alpha^{m-1}_{1,1})(\alpha_{1,1}) + 2(\alpha^{m-1}_{1,0})(\alpha_{0,1}), \end{aligned}$$

et en ajoutant

$$2((\alpha^m) = 2(\alpha)(\alpha^{m-1}) + 2(\alpha_{1,1})(\alpha^{m-1}_{1,1}) + 4\alpha_{0,1}(\alpha^{m-1}_{1,0}),$$

égalité qu'il est facile d'identifier avec la précédente qui se trouve ainsi démontrée.

35. *Conséquence.* — On sait que $\frac{\sin mx}{\sin x}$ et $\cos mx$ s'expriment au moyen d'une fonction entière de $\cos x$. De même, par conséquent, $\frac{P_m}{P_1}$ et Q_m par rapport à Q_1.

Or, Q_1 ne dépend que de $((\alpha)$ et de $i^n\alpha$. $\frac{P_m}{P_1}$ et Q_m restent donc invariables si à la suite α on en substitue une autre β, telle que

$$n_\alpha \equiv n_\beta \pmod 4$$

et

$$((\alpha) = ((\beta).$$

Par exemple, on peut prendre pour β l'une des suites obtenues par permutation circulaire des éléments de α.

Les conditions sont encore remplies si, n_α étant $\equiv 1 \pmod 4$, on prend pour β un seul élément b ayant pour valeur $((\alpha)$.

On a, en posant $b = ((\alpha)$,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{P_m}{i^{(m-1)}P_1} &= \frac{((\alpha^m, \eta)}{((\alpha, \eta)} = \frac{((b^m, \eta)}{((b, \eta)}, \\ \frac{2Q_m}{i^m} &= ((\alpha^m) = ((b^m), \end{aligned}\right.$$

puisque $\frac{P_m}{P_1}$ et Q_m restent invariables par la substitution de b à α.

En faisant usage de l'identité déjà vue

$$\alpha_{1,0}((\alpha^{m-1}, \eta) = (\alpha_{1,0}^{m-1})((\alpha, \eta)$$

appliquée à α et à b, la première de ces égalités peut s'écrire

$$\frac{P^m}{i^{(m-1)}P_1} = \frac{(\alpha_{1,0}^m)}{(\alpha_{1,0})} = \frac{(b^{m-1})}{1}$$

et, en remplaçant, dans les deux, b par sa valeur

$$(b = ((\alpha) = 2i^{-1}Q_1,$$

on a

$$(B_3) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{P_m}{P_1} &= i^{(m-1)}(([2i^{-1}Q_1]^{m-1}), \\ Q_m &= \frac{i^m}{2}(([2i^{-1}Q_1]^m). \end{aligned}\right.$$

Le développement des seconds membres, dans lesquels Q_1 est remplacé par $\cos x$, donne l'expression de $\frac{\sin mx}{\sin x}$ et de $\cos mx$.

Ainsi se mettent sous forme de continuant et d'adjoint les expressions connues de $\frac{\sin mx}{\sin x}$ *et de* $\cos mx$ *en fonction de* $\cos x$.

36. En faisant $n_\alpha \equiv 2 \pmod 4$ et

$$((bc) = ((\alpha),$$

on trouve, par un calcul analogue,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{P_m}{P_1} &= i^{2(m-1)}(\gamma_{1,0}^m),\\ Q_m &= \frac{i^{2m}}{2}((\gamma^m),\end{aligned}\right.$$

où γ représente la suite des deux éléments, bc, 1.

On a d'ailleurs

$$((bc) = 2i^{-2}Q_1 = -2Q_1,$$

d'où

$$bc = -2Q_1 - 2.$$

En remplaçant l'élément bc par cette valeur, on a une nouvelle expression des mêmes fonctions sous forme de continuant et d'adjoint.

37. Aucune hypothèse n'a été faite sur les signes des éléments de α. Les calculs précédents sont, par conséquent, applicables à $-\alpha$.

Posons

$$(\mathrm{B}_4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{i^{-mn_\alpha}((-\alpha^m,\eta)}{2}\,g' &= P_{-m},\\ \frac{i^{-mn_\alpha}((-\alpha_m)}{2} &= Q_{-m}.\end{aligned}\right.$$

Dans la première égalité, g' est déterminé par la condition $g + g' = 0$.

On pourrait répéter les mêmes calculs que pour P_m et Q_m. Nous allons vérifier seulement que, de même qu'on a

$$\sin -mx = -\sin mx,$$

$$\cos -mx = \cos mx,$$

on a aussi

$$P_{-m} = -P_m,$$

$$Q_{-m} = Q_m.$$

On a en effet

$$((-\alpha^m,\eta) = (-1)^{mn_\alpha}((\alpha^m,\eta),$$

d'où

$$\frac{P_{-m}}{P_m} = \frac{i^{-mn_\alpha}(-1)^{mn_\alpha}}{i^{mn_\alpha}} \frac{g'}{g} = -1.$$

On a aussi

$$((-\alpha^m) = (-1)^{mn_\alpha}((\alpha^m),$$

d'où

$$\frac{Q_{-m}}{Q_m} = \frac{i^{-mn_\alpha}(-1)^{mn_\alpha}}{i^{mn_\alpha}} = 1.$$

38. On peut se rendre compte de la manière dont on passe des termes négatifs aux termes positifs en mettant (b^m) sous la forme $(-b^p, 0, b^{p+1+m})$ (p entier) qui lui est équivalente, puisqu'elle se réduit à $(0, b^{m+1})$.

De même $(-b^m)$ sous la forme $(-b^{m+1+p}, 0, b^p)$.

On a la correspondance suivante :

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \dfrac{P_{-m}}{i^{-(m-1)}P_{-1}} & \cdots & \dfrac{P_{-2}}{i^{-1}P_{-1}} & \dfrac{P_{-1}}{P_{-1}} & \underbrace{\dfrac{P_0}{iP_{-1}}} \quad \underbrace{\dfrac{P_0}{i^{-1}P_1}} & \dfrac{P_1}{P_1} & \dfrac{P_2}{iP_1} & \cdots & \dfrac{P_m}{i^{m-1}P_1} \\
= & (-b^{m-1}) & & (-b) & (-b, 0) & (0) & (0, b) & (b) & & (b^{m-1}) \\
 & \dfrac{2Q_{-m}}{i^{-m}} & \cdots & \dfrac{2Q_{-2}}{i^{-2}} & \dfrac{2Q_{-1}}{i^{-1}} & \dfrac{2Q_0}{1} & \dfrac{2Q_1}{i^1} & \dfrac{2Q_2}{i^2} & \cdots & \dfrac{2Q_m}{i^m} \\
= & ((-b^m) & & ((-b^2) & ((-b) & \underbrace{((-b, 0)} = \underbrace{((0, b)} & ((b) & ((b^2) & \ldots & ((b^m).
\end{array}$$

Par convention, on fait $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, valeurs qui résultent du Tableau précédent, aussi bien que de l'analogie avec les fonctions trigonométriques.

Remarque. — On trouve, pour des continuants tels que $(\alpha^m, \alpha'^{m'}, \ldots)$, où l'on considère des suites α^m différentes, des formules de récurrence plus générales, mais sans utilité pour les questions traitées dans les parties suivantes.

39. II. *Décomposition d'un continuant en une somme de deux autres.* — La formule suivante permet de décomposer un continuant en une somme de deux autres ayant une valeur particulière

$$(\mathrm{B}_5) \qquad (\alpha, 1, 1, \beta) = (\alpha, 1, \beta) + (\alpha, \beta).$$

Elle peut encore se mettre sous la forme

$$(\alpha, a+1, b+1, \beta) = (\alpha, a+b+1, \beta) + (\alpha, a, b, \beta).$$

Lorsque α est remplacé par o, elle se réduit à l'identité

$$(a, \alpha) = (a-1, \alpha) + (\alpha),$$

et, si α s'évanouit, à

$$(a+1, b+1, \beta) = (a+b+1, \beta) + (a, b, \beta).$$

Remarque. — La formule (B_5), dont la vérification ne présente pas de difficulté, s'applique aussi bien aux adjoints qu'aux continuants.

40. III. *Représentation de certaines formes algébriques : 1° Puissances x^m.* — Soient :

(**a**). (α) un continuant de valeur x,

(**b**). (ν) un continuant satisfaisant aux conditions

$$\nu_{1,1} = 0,$$
$$\nu_{0,1} + \nu_{1,0} = 0,$$

pour lesquelles il faut que n_ν soit pair, si les éléments sont des nombres réels (n° 19); on posera, par exemple,

$$(\nu) = (y, \eta),$$

y étant un nombre quelconque qui sera la valeur de (ν);

(**c**). (ρ) un continuant (ν) de valeur 1, par exemple,

$$(0, -1, 1, 0).$$

Les égalités suivantes se vérifient immédiatement en développant les continuants

$$(\mathrm{B}_6)\qquad \left\{\begin{aligned} (\alpha, \nu, \underline{\alpha}) &= (\nu)(\alpha)^2, \\ (\alpha, \underline{\nu}, \underline{\alpha}) &= (\nu)(\alpha)^2. \end{aligned}\right.$$

Elles servent à former certains continuants ayant pour valeur x^m et composés au moyen de x et des éléments de (α).

En effet, soient $m = 2p + q$ (p, q entiers); (α), (β), (ν) trois continuants ayant pour valeurs respectives x, x^p, et $y = x^q$.

On a

$$(\beta, \nu, \underline{\beta}) = (\nu)(\beta)^2 = x^{2p+q} = x^m.$$

Pour obtenir une représentation de x^m, donnons à q dans cette formule la valeur du résidu de m (mod 2) et à (ν) la forme (ρ) ou (x, η), suivant que $q = 0$, ou $q = 1$.

Il ne restera plus qu'à déterminer (β) en posant, par exemple,

$$(\beta) = (\gamma, \nu', \underline{\gamma}) = x^p.$$

On opérera pour x^p de la même manière que pour x^m et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'exposant soit réduit à 1 ; alors, on appliquera la formule

$$(\alpha, \nu, \underline{\alpha}) = (\nu)\, x^2.$$

Pour $m = 13$, on trouve les formes suivantes :

$$\left(\overbrace{\alpha, x, \eta, \underline{\alpha}}, \rho, \overbrace{\alpha, \underline{\eta}, x, \underline{\alpha}}, x, \eta, \overbrace{\alpha, x, \eta, \underline{\alpha}}, \underline{\rho}, \overbrace{\alpha, \underline{\eta}, x, \underline{\alpha}}\right).$$

41. 2° *Formes* xy, $x^2 \pm y^2$. — Les continuants normaux symétriques

$$(\alpha, m, \underline{\alpha}),\ (\alpha, \underline{\alpha}),\ (\alpha, -\underline{\alpha})$$

ont respectivement pour valeurs

$$(\alpha)[m(\alpha)+2(\alpha_{0,1})],\quad (\alpha)^2+(\alpha_{0,1})^2,\quad (-1)^{n_\alpha}[(\alpha)^2-(\alpha_{0,1})^2].$$

x et y étant deux nombres quelconques donnés, on peut poser

$$\text{soit}\ \begin{cases}(\alpha) = x,\\ m(\alpha)+2(\alpha_{0,1})=y,\end{cases}\qquad \text{soit}\ \begin{cases}(\alpha)=x,\\ (\alpha_{0,1})=y,\end{cases}$$

et trouver en général respectivement pour

$$\left(\alpha, m, \underline{\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \left(\alpha \pm \underline{\alpha}\right)$$

des éléments satisfaisant à ces hypothèses.

On a alors

$$(\mathrm{B}_7)\qquad \begin{cases}\left(\alpha, m, \underline{\alpha}\right) = xy,\\ \left(\alpha, \underline{\alpha}\right) = x^2+y^2,\\ \left(\alpha, -\underline{\alpha}\right) = (-1)^{n_\alpha}(x^2-y^2).\end{cases}$$

Exemples :

$$\begin{aligned}(2, 3, 4, 3, 2) &= 7.32,\\ (2, 3, 3, 2) &= 7^2+2^2,\\ (2, 3, -3, -2) &= 7^2-2^2.\end{aligned}$$

42. 3° *Formes* $ax^2+2bxy+cy^2$. — On a, pour $e=\pm 1$,

$$(\mathrm{B}_8)\quad e^{n_\alpha}\left(\alpha, \beta, 0, \underline{e\,\alpha}\right) = \alpha^2\beta_{0,1}+\alpha\,\alpha_{0,1}(e\beta+\beta_{1,1})+e\,\alpha_{0,1}^2\,\beta_{1,0}.$$

En posant

$$\begin{cases}(\alpha) = x,\\ (\alpha_{0,1}) = y,\end{cases}\qquad \begin{cases}(\beta_{0,1}) = a,\\ e(\beta_{1,0}) = c,\end{cases}\qquad e(\beta)+(\beta_{1,1}) = 2b,$$

on trouve la forme donnée

$$e^{n_\alpha}\left(\alpha, \beta, 0, \underline{e\,\alpha}\right) = ax^2+2bxy+cy^2.$$

Si l'on pose en outre

$$-e(\beta)+(\beta_{1,1})=2t,$$

on en déduit

$$\begin{cases} e(\beta) = b - t, \\ (\beta_{1,1}) = b + t. \end{cases}$$

Le discriminant D a pour valeur

$$\begin{aligned} D = ac - b^2 &= e\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \left[\frac{e\beta+\beta_{1,1}}{2}\right]^2 \\ &= -e(-1)^{n_\beta} - \left[\frac{e\beta-\beta_{1,1}}{2}\right]^2 \\ &= \pm 1 - t^2. \end{aligned}$$

43. Une autre manière de représenter cette même forme F, qui peut s'écrire

$$\frac{1}{a}[(ax+by)^2+Dy^2],$$

consiste à poser

$$\frac{x}{(\alpha)} = \frac{y}{(\alpha_{0,1})} = 1,$$
$$\frac{a}{(\gamma)} = \frac{b}{(\gamma_{1,0})} = S,$$

le rapport S étant un nombre quelconque.

On en déduit

$$(B_9) \qquad F = \frac{1}{S(\gamma)}[S^2(\alpha,\gamma)^2 + D(\alpha_{0,1})^2].$$

(*A suivre.*)