NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. CHARBONNIER

Sur la théorie des perturbations du pendule

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 145-162

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__145_0>

[R7fα]

SUR LA THÉORIE DES PERTURBATIONS DU PENDULE;

PAR M. LE COMMANDANT P. CHARBONNIER.

1. Nous nous proposons, dans le problème classique du mouvement du pendule simple, de donner des formules générales permettant le calcul des perturbations produites par l'action de petites forces quelconques.

Une fois ces formules établies, la solution de chaque cas particulier devient très simple et presque immédiate.

La division de notre travail est la suivante :

I. — ÉTABLISSEMENT DES FORMULES GÉNÉRALES.

2. **Équation différentielle du mouvement.** — Soit O l'*axe instantané* de rotation autour duquel, à l'instant actuel, tourne le fil OM. Dans la plupart des cas, ce point O sera absolument fixe.

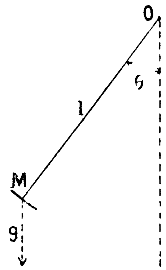
La longueur du fil est l, l'angle de OM avec la verticale est θ.

Appliquons le *théorème des moments des quan-*

tités de mouvement relativement à un axe passant en O et perpendiculaire au plan d'oscillation du pendule.

La vitesse du point M est $l\,\frac{d\theta}{dt}$, et son moment par rapport à l'axe passant en O est $l^2\,\frac{d\theta}{dt}$.

Fig. 1.



Les forces extérieures se réduisent à la *gravité* g, appliquée en M, dont le moment est $gl\sin\theta$.

Quand θ augmente, cette force tend à diminuer l'angle. On aura donc, d'après le théorème rappelé,

$$\frac{d}{dt}\left(l^2\,\frac{d\theta}{dt}\right) + gl\sin\theta = 0.$$

On en déduira l'équation différentielle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{l}\,\frac{dl}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0. \tag{1}$$

3. **Mouvement principal du pendule.** — Nous considérons comme *mouvement principal* celui d'un pendule dont le fil conserve une longueur constante l_0 et qui décrit seulement de très petites oscillations autour de la verticale.

Ainsi, le sinus pourra être réduit à l'arc, à un terme en θ^3 près, qu'on considérera ensuite comme un *terme secondaire*.

Dans ces conditions, l'équation (1) se réduira à

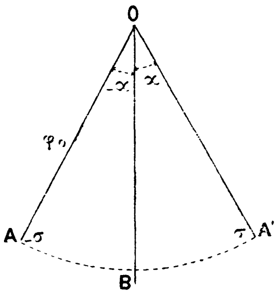
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta = 0. \tag{2}$$

On a posé

$$k^2 = \frac{g}{l_0}.$$

Soit A la position initiale du pendule qui correspond à la valeur $-\alpha$ de l'angle. Le pendule oscille de

Fig. 2.



A en A', allant de $-\alpha$ à $+\alpha$. L'arc s varie de $-\sigma$ à $+\sigma$.

On aura, pour les équations finies du mouvement, en intégrant l'équation (2),

$$\theta = -\alpha \cos kt, \qquad \frac{d\theta}{dt} = k\alpha \sin kt. \tag{3}$$

Ce sont les formules ordinaires du pendule.

On en déduit, en faisant $\frac{d\theta}{dt} = 0$, pour la durée T d'une *oscillation simple* du pendule (de A en A'),

$$T = \frac{\pi}{k}.$$

La *vitesse* $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$ est maximum au point le plus bas et a pour expression, en faisant $kt = \frac{\pi}{2}$,

$$\theta'_m = k\alpha.$$

L'*arc de remontée* est égal à l'*arc de descente.*

4. **Forces perturbatrices** — Supposons qu'une petite force accélératrice quelconque vienne à agir sur le pendule. Soit

$$\varepsilon\varphi\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}, t\right)$$

la fonction qui, d'une façon générale, représente l'accélération de cette force estimée suivant la direction de l'arc élémentaire décrit par le pendule.

La fonction φ est quelconque, avec les trois variables, l'*angle* θ, la *vitesse* $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$, le *temps* t. Le nombre ε est un coefficient que nous supposons très petit, et dont le carré sera négligé; l'hypothèse initiale est que le mouvement du pendule sera très peu modifié par l'introduction de cette force perturbatrice.

On écrira alors l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta + \varepsilon\varphi\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}, t\right) = 0.$$

5. **Développement de la fonction** θ. — L'angle θ, observé au temps t, est fonction du coefficient ε, et, à cause de la petitesse supposée de ce coefficient, on pourra développer θ en série convergente, suivant ses puissances ascendantes.

On posera, par suite,

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \ldots,$$

$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ étant des fonctions de t, inconnues, qu'il s'agit de déterminer.

L'équation différentielle s'écrira alors

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \ldots + k^2\theta_0 + \varepsilon k^2\theta_1 + \varepsilon^2 k^2\theta_2 + \ldots$$
$$+ \varepsilon\varphi\left(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \ldots, \frac{d\theta_0}{dt} + \varepsilon\frac{d\theta_1}{dt} + \ldots, t\right) = 0.$$

Développons la fonction φ par la formule de Taylor; il viendra

$$\varphi = \varphi\left(\theta_0, \frac{d\theta_0}{dt}, t\right) + \varepsilon\left[\theta_1\varphi'_{\theta_0} + \frac{d\theta_1}{dt}\varphi'_{\frac{d\theta_0}{dt}}\right] + \ldots.$$

Annulant successivement les multiplicateurs de ε^0, ε^1, ε^2, ..., il viendra le système des formules suivantes :

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + k^2\theta_0 = 0,$$
$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + k^2\theta_1 + \varphi\left(\theta_0, \frac{d\theta_0}{dt}, t\right) = 0,$$
$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + k^2\theta_2 + \theta_1\varphi'_{\theta_0} + \frac{d\theta_1}{dt}\varphi'_{\frac{d\theta_0}{dt}} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Avec les conditions suivantes, à l'origine des temps : pour $t = 0$, on a

$$\theta_0 = -\alpha, \qquad \frac{d\theta_0}{dt} = 0,$$
$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = 0, \qquad \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = \ldots = 0.$$

6. **Fonction θ_0.** — Elle représente le terme principal de la série et elle est donnée par les formules (3)

$$\theta_0 = -\alpha\cos kt, \qquad \frac{d\theta_0}{dt} = k\alpha\sin kt.$$

La *durée* T d'une *oscillation simple* du mouvement principal est

$$T = \frac{\pi}{k}.$$

La *vitesse* au point le plus bas est

$$\theta'_m = k\alpha.$$

7. **Fonction** θ_1. — L'équation différentielle qui définit la fonction θ_1

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + k^2\theta_1 + \varphi\left(\theta_0, \frac{d\theta_0}{dt}, t\right) = 0$$

deviendra, en remplaçant dans φ les fonctions θ_0 et $\frac{d\theta_0}{dt}$ par leurs valeurs principales,

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + k^2\theta_1 + \varphi\left(-\alpha\cos kt,\ k\alpha\sin kt,\ t\right) = 0.$$

On a ainsi réduit la fonction φ à une fonction de la seule variable t, et nous poserons, par suite,

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + k^2\theta_1 + \varphi(t) = 0.$$

C'est une équation linéaire du second ordre, avec second membre, que l'on sait intégrer.

A cet effet, on posera, comme on sait,

$$\theta_1 = M\cos kt + N\sin kt,$$

M et N étant deux fonctions arbitraires de t.

En différentiant, on écrira

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -kM\sin kt + kN\cos kt,$$

et posant, comme première condition imposée aux fonctions M et N, la relation

$$(p) \qquad \frac{dM}{dt}\cos kt + \frac{dN}{dt}\sin kt = 0.$$

D'autre part, formant $\frac{d^2\theta_1}{dt^2}$ et portant cette valeur ainsi que celle de θ_1 dans l'équation différentielle qui définit la fonction θ_1, il viendra une seconde équation de condition qui est la suivante :

$$(q) \qquad -\frac{dM}{dt}\sin kt + \frac{dN}{dt}\cos kt + \frac{\varphi(t)}{k} = 0.$$

En combinant les deux équations (p) et (q), on aura

$$\frac{dN}{dt} + \frac{1}{k}\varphi(t)\cos kt = 0,$$

$$\frac{dM}{dt} - \frac{1}{k}\varphi(t)\sin kt = 0,$$

d'où l'on déduit

$$N = -\frac{1}{k}\int_0^t \varphi(t)\cos kt\,dt,$$

$$M = \frac{1}{k}\int_0^t \varphi(t)\sin kt\,dt.$$

On aura donc, pour θ_1, l'expression

$$k\theta_1 = \cos kt\int_0^t \varphi(t)\sin kt\,dt - \sin kt\int_0^t \varphi(t)\cos kt\,dt,$$

et l'on obtiendra aussi la dérivée sous la forme

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\sin kt\int_0^t \varphi(t)\sin kt\,dt - \cos kt\int_0^t \varphi(t)\cos kt\,dt.$$

θ_1 et $\frac{d\theta_1}{dt}$ sont ainsi des fonctions de deux intégrales que nous désignerons par les notations suivantes :

$$\mathbf{E}_s = \int_0^t \varphi(t)\sin kt\,dt,$$

$$\mathbf{E}_c = \int_0^t \varphi(t)\cos kt\,dt.$$

8. **Formules générales.** — Il viendra ainsi, pour l'intégrale générale de l'équation différentielle du pendule, en ne conservant que les termes du premier degré en ε :

$$(4) \qquad \theta = -\alpha \cos kt + \frac{\varepsilon}{k}\left[\mathbf{E}_s \cos kt - \mathbf{E}_c \sin kt\right],$$

$$(5) \qquad \theta' = \frac{d\theta}{dt} = k\alpha \sin kt - \varepsilon\left[\mathbf{E}_s \sin kt + \mathbf{E}_c \cos kt\right].$$

Telles sont les formules générales que nous nous proposions d'établir, comme seconde approximation des formules du pendule simple.

On remarquera qu'on peut mettre les fonctions $\mathbf{E}$ sous la forme

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k\alpha}\int_{-\alpha}^{\theta} \varphi(t)\, d\theta,$$

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k^2\alpha}\int_0^{v} \varphi(t)\, dv.$$

9. **Points remarquables de la trajectoire.** — 1° *Durée d'une oscillation simple.* — Faisant $\frac{d\theta}{dt} = 0$ dans la formule (5) et remplaçant, dans le crochet, kt par sa valeur π, en première approximation ($\sin kt = 0$ et $\cos kt = -1$), on aura

$$\sin kt = -\frac{\varepsilon}{k\alpha}\mathbf{E}_c(\pi),$$

$\mathbf{E}_c(\pi)$ désignant la valeur que prend l'intégrale $\mathbf{E}_c$ pour $kt = \pi$.

On en déduit

$$kt = \pi + \frac{\varepsilon}{k\alpha}\mathbf{E}_c(\pi)$$

en négligeant un terme en ε^3.

Par suite, l'augmentation ΔT de la durée $T = \frac{\pi}{k}$ d'une oscillation simple sera donnée par la formule

$$\Delta T = \frac{\varepsilon}{k^2 \alpha} \mathbf{E}_c(\pi). \tag{6}$$

On voit que *la condition nécessaire et suffisante pour que la durée d'une oscillation simple reste la même que dans le cas du mouvement principal est que*

$$\mathbf{E}_c(\pi) = 0.$$

2° *Amplitude d'une oscillation simple.* — Portant dans l'équation (4), qui donne θ, la valeur

$$kt = \pi + \frac{\varepsilon}{k\alpha} \mathbf{E}_c(\pi),$$

on remplacera, dans le crochet, $\sin kt$ par 0 et $\cos kt$ par -1.

D'autre part, comme $\cos kt$ ne diffère de -1 que par un terme en ε^2, il viendra, en négligeant un terme de cet ordre, pour valeur de l'oscillation θ_m de remontée,

$$\theta_m = \alpha - \frac{\varepsilon}{k} \mathbf{E}_s(\pi),$$

et, par suite, l'augmentation $\Delta\alpha$ de l'angle α sera donnée par la formule

$$\Delta\alpha = -\frac{\varepsilon}{k} \mathbf{E}_s(\pi). \tag{7}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'amplitude de l'oscillation ne soit pas changée est que

$$\mathbf{E}_s(\pi) = 0.$$

3° *Point le plus bas.* — Pour obtenir ce point, on fera $\theta = 0$ dans la formule (4). Dans le crochet, on prendra $kt = \frac{\pi}{2}$, d'où $\cos kt = 0$ et $\sin kt = 1$; il viendra

$$\cos kt = -\frac{\varepsilon}{k\alpha} \mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$kt = \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{k\alpha} \mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

et, par suite,

$$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{k^2\alpha} \mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{8}$$

La *vitesse* au point le plus bas sera affectée d'une correction

$$\Delta\theta'_m = -\varepsilon \mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{9}$$

10. **Résumé.** — Ainsi le problème est ramené à l'évaluation de deux intégrales $\mathbf{E}_s$ et $\mathbf{E}_c$ qui dépendent d'une fonction arbitraire $\varphi\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}, t\right)$ qu'on sait réduire à une fonction du temps, sous la forme

$$\varphi(-\alpha \cos kt,\ k\alpha \sin kt,\ t).$$

La fonction φ est spéciale à chaque cas particulier et le caractérise : *elle doit être demandée à une étude physique du problème.*

Nous allons maintenant donner quelques exemples où nous spécifierons la fonction φ.

II. — LE MOUVEMENT DU PENDULE DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

11. **Équation différentielle.** — Nous supposons le pendule de longueur constante l_0. La résistance de l'air est une fonction de la *vitesse* $v = l_0 \frac{d\theta}{dt}$ du pendule; nous représenterons par $cF(v)$ l'accélération de cette résis-

tance, c étant le ***coefficient balistique*** du point matériel dont nous étudions les oscillations. $F(v)$ est une fonction quelconque de la vitesse v, qui, cependant, est toujours positive et croissante avec v. Il peut, d'ailleurs, exister dans $F(v)$ un terme constant, indépendant de la vitesse, et qui représentera une *résistance de frottement*.

La résistance $cF(v)$ n'apporte au mouvement principal du pendule, calculé dans l'hypothèse $c = 0$, que des modifications qui, par hypothèse, sont extrêmement petites.

L'équation différentielle du mouvement du pendule, en introduisant le terme retardateur $cF(v)$, est alors la suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2\theta + \frac{c}{l_0} F(v) = 0.$$

L'accélération $cF(v)$ s'oppose, en effet, dans tous les cas, à l'accélération $l_0 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ du mobile le long de l'arc décrit.

12. Équations du mouvement. — 1° Les équations finies du mouvement seront donc celles du n° 8 où $\frac{c}{l_0}$ remplace ε. On aura ainsi

$$\theta = - \quad \alpha \cos kt + \frac{c}{l_0 k} [\mathbf{E}_s \cos kt - \mathbf{E}_c \sin kt],$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \quad k\alpha \sin kt - \frac{c}{l_0} \quad [\mathbf{E}_s \sin kt + \mathbf{E}_c \cos kt]$$

avec les valeurs suivantes des intégrales $\mathbf{E}_s$ et $\mathbf{E}_c$:

$$\mathbf{E}_s = \int_0^t F(k\alpha l_0 \sin kt) \sin kt \, dt,$$

$$\mathbf{E}_c = \int_0^t F(k\alpha l_0 \sin kt) \cos kt \, dt,$$

qu'on peut mettre aussi, en introduisant l'arc s, sous la forme

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k\alpha l_0} \int_{-\sigma}^{s} \mathrm{F}(v)\, ds,$$

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k^2\alpha l_0} \int_{0}^{v} \mathrm{F}(v)\, dv.$$

2° L'intégrale $\mathbf{E}_c$ s'obtient immédiatement par une quadrature; en posant $\mathrm{S}(v) = \int_0^v \mathrm{F}(v)\, dv$, on aura

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{k^2\alpha l_0} \mathrm{S}(v).$$

$\mathbf{E}_c$ ne dépend que de la variable v et $\mathrm{S}(v)$ s'annule avec v.

3° L'intégrale $\mathbf{E}_s$ est proportionnelle au *travail*

$$c \int_{-\sigma}^{s} \mathrm{F}(v)\, ds$$

de la résistance de l'air, le long de l'arc.

C'est donc une quantité toujours positive qui ne peut, par suite, s'annuler.

L'intégrale $\mathbf{E}_s$ s'exprimera en fonction de v comme il suit :

On a (3)

$$v = k\alpha l_0 \sin kt,$$

d'où

$$\frac{dv}{dt} = k^2\alpha l_0 \cos kt,$$

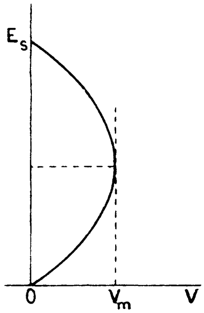
et comme $ds = v\, dt$, on aura

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{k} \frac{1}{(k\alpha l_0)^2} \int_0^v \frac{v\mathrm{F}(v)\, dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{k^2\alpha^2 l_0^2}}}.$$

Cette intégrale peut être mise sous forme d'une table à double entrée, d'arguments v et $k\alpha l_0$.

La variable v reprenant la même valeur à des dis-

Fig. 3.



tances égales de part et d'autre de la verticale, la fonction $\mathbf{E}_s$ présente un axe de symétrie.

Elle ne s'annule pas quand v redevient égale à zéro.

13. **Points remarquables**. — 1° *Durée d'une oscillation simple.* — L'intégrale $\mathbf{E}_c$ s'annulant quand la vitesse redevient nulle, on aura

$$\mathbf{E}_c(\pi) = 0,$$

et, par suite, d'après le théorème du n° 9, 1°, on aura

$$\Delta T = 0.$$

Donc, *la résistance de l'air n'altère pas la durée des oscillations du pendule.*

Il en est de même d'une *résistance constante* [cas particulier de la fonction $F(v)$].

2° *Amplitude d'une oscillation simple.* — La fonction $\mathbf{E}_s(\pi)$ n'est pas nulle.

On aura donc, d'après la formule générale du n° 9, 2°,

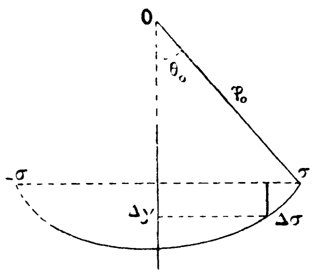
$$\Delta\alpha = -\frac{c}{kl_0}\mathbf{E}_s(\pi).$$

On écrira cette formule

$$\Delta\alpha = -\frac{c}{k^2\alpha l_0^2}\int_{-\sigma}^{\sigma}\mathrm{F}(v)\,ds = -\frac{\mathfrak{T}}{k^2\alpha l_0^2},$$

$\mathfrak{T}$ étant le travail total de la résistance le long de l'arc.

Fig. 4.



Soit Δy la différence de hauteur des deux extrémités $-\sigma$ et σ.

On a

$$\Delta y = \alpha\,\Delta\sigma,$$

et comme $k^2 = \frac{g}{l_0}$ et $\sigma = l_0\alpha$, il viendra

$$g\,\Delta y = -\mathfrak{T}.$$

Cette relation exprime le théorème évident que *le travail effectué en moins par la pesanteur a été absorbé par le travail de la résistance de l'air.*

3° Le *temps*, pour arriver au point le plus bas, sera augmenté de la quantité (n° 9, 3°)

$$\Delta\mathrm{T}_{\frac{1}{2}} = \frac{c}{k^2\alpha l_0}\mathbf{E}_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{c}{k^4\alpha^2 l_0^4}\mathrm{S}(v_m),$$

et la *vitesse* au passage de la verticale sera diminuée de

$$\Delta\theta'_m = -\frac{c}{l_0}\mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

III. — CAS D'UNE RÉSISTANCE MONOME.

14. Forme de la résistance. — Nous allons étudier, d'une manière spéciale, le cas où la résistance de l'air $cF(v)$ est représentée par une formule monome

$$F(v) = B_n v^n.$$

On posera $b_n = cB_n$, de sorte que l'accélération de la résistance sera exprimée par la formule $b_n v^n$.

Le cas de $n = 0$ correspond à l'hypothèse d'une *résistance de frottement*.

D'après le principe de l'addition des termes correctifs, on obtiendra, par addition des formules monomes, la correction correspondant à la fonction

$$F(v) = B_0 + B_1 v + B_2 v^2 + \ldots + B_n v^n.$$

15. Calcul des intégrales $\mathbf{E}_c$ et $\mathbf{E}_v$. — 1° On a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_c &= \int_0^t F(k\alpha l_0 \sin kt)\cos kt\,dt\\ &= B_n(\alpha l_0)^n k^{n-1}\int_0^{kt} \sin^n kt \cos kt\,dkt,\end{aligned}$$

ce qui s'intègre immédiatement par la formule

$$\mathbf{E}_c = \frac{B_n}{n+1}k^{n-1}\alpha^n l_0^n \sin^{n+1} kt.$$

On vérifie d'abord que $\mathbf{E}_c(\pi) = 0$, ainsi qu'on l'a montré dans le cas général (n° **12**, 2°).

2° L'intégrale $\mathbf{E}_s$ s'écrira

$$\mathbf{E}_s = \int_0^t F(k\alpha l_0 \sin kt) \sin kt\, dt$$
$$= B_n k^{n-1}(\alpha^n l_0^n) \int_0^{kt} \sin^{n+1} kt\, dkt.$$

Posant, pour abréger, $kt = x$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^x \sin^{n+1} x\, dx$$

est connue. Rappelons comment on en trouve la valeur.

On établit d'abord une relation entre I_n et I_{n-2} en intégrant par parties :

$$I_n = -\cos x \sin^n x + n \int_0^x \cos^n x \sin^{n-1} x\, dx$$

$$= -\cos x \sin^n x + n \int_0^x \sin^{n-1} x\, dx - n I_n,$$

d'où

$$(n+1) I_n = -\cos x \sin^n x + n I_{n-2}.$$

On connaît d'ailleurs directement

$$I_0 = \int_0^x \sin x\, dx = 1 - \cos x$$

et

$$I_{-1} = \int_0^x dx = x.$$

On établira alors le Tableau de récurrence suivant :

n pair.	n impair.
$I_0 = -\cos x \qquad + 1,$	$I_{-1} = \qquad x.$
$3 I_2 = -\cos x \sin^2 x + 2 I_0,$	$2 I_1 = -\cos x \sin x + I_{-1},$
$5 I_4 = -\cos x \sin^4 x + 4 I_2,$	$4 I_3 = -\cos x \sin^3 x + 3 I_1,$
. . . .	. . . .
$(n+1) I_n = -\cos x \sin^n x + n I_{n-2},$	$(n+1) I_n = -\cos x \sin^n x + n I_{n-2}.$

Sans chercher, ce qui serait possible, à obtenir l'expression de I_n pour toute valeur de x, proposons-nous seulement d'obtenir la valeur pour $x = \pi$.

On voit que I_0 devient égal à 2 et I_{-1} à π, et que dans tous les autres I_n, le premier terme du second membre s'annule.

Par multiplication membre à membre on obtient alors :

n pair.	n impair.
$I_n(\pi) = 2\,\dfrac{2.4\ldots n}{1.3.5\ldots(n+1)}$,	$I_n(\pi) = \pi\,\dfrac{1.3.5\ldots n}{2.4.6\ldots(n+1)}$.

Pour différentes valeurs de n, on aura :

n	0.	1.	2.	3.	4.
I_n	2	»	$2\,\dfrac{2}{1.3}$	»	$2\,\dfrac{2.4}{1.3.5}$
I_n	»	$\pi\,\dfrac{1}{2}$	»	$\pi\,\dfrac{1.3}{2.4}$	»

n	5.	...	n.	n.
I_n	»	...	$2\,\dfrac{2.4\ldots n}{1.3.5\ldots(n+1)}$	»
I_n	$\pi\,\dfrac{1.3.5}{2.4.6}$	...	»	$\pi\,\dfrac{1.3.5\ldots n}{2.4.6\ldots(n+1)}$

16. Amplitude de l'oscillation. — 1° La diminution de l'amplitude de l'oscillation due à la résistance de l'air est (n° 13)

$$\Delta\alpha = -\frac{c}{kl_0}\,\mathbf{E}_s(\pi),$$

ce qui deviendra, dans le cas actuel,

$$\Delta\alpha = -\,b_n k^{n-2} \alpha^n l_0^{n-1}\, I_n(\pi),$$

ou encore

$$\Delta\alpha = -\frac{b_n}{g}\left(\frac{\alpha g T}{\pi}\right)^n I_n(\pi).$$

Pour $n = 0$ (résistance de frottement), $\Delta\alpha$ est indépendant de l'angle α et de la durée T de l'oscillation.

Par suite, on peut, par soustractions successives d'un même angle $\Delta\alpha$, trouver l'angle restant au bout d'un nombre p, quelconque, d'oscillations.

Le nombre total P d'oscillations simples, jusqu'à l'arrêt du pendule, est ainsi

$$P = \frac{\alpha}{2} \frac{g}{b_0}.$$

Pour $n \geqq 1$, il est évident que le nombre P devient infini.

2° En remplaçant $I_n(\pi)$ par sa valeur, on aura les deux formules suivantes :

$$\Delta\alpha = -\frac{b_n}{g}\left(\frac{\alpha g T}{\pi}\right)^n 2 \frac{2.4\ldots n}{1.3.5\ldots(n+1)} \qquad \text{(pour } n \text{ pair)},$$

$$\Delta\alpha = -\frac{b_n}{g}\left(\frac{\alpha g T}{\pi}\right)^n \pi \frac{1.3.5\ldots n}{2.4.6\ldots(n+1)} \qquad \text{(pour } n \text{ impair)}.$$

17. Point le plus bas. — On a

$$\Delta T_{\frac{1}{2}} = \frac{c}{k^2 \alpha l_0} E_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{b_n}{n+1}(\alpha l_0)^{n-1} k^{n-3}$$

et

$$\Delta v_m = \frac{k}{2} l_0 \Delta\alpha.$$

(A suivre.)