NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 136-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__136_1>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Lyon.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soient*

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\, a_1, a_2, \ldots, a_r)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations d'un groupe G *de transformations.*

1° *Établir les équations différentielles auxquelles satisfont les* x', *considérées comme fonctions des* a.

N. B. — *On n'examinera pas la réciproque.*

2° *Considérant comme connue la théorie des groupes à un paramètre, appliquer les équations trouvées à la construction des sous-groupes à un paramètre contenus dans* G.

3° *Calculer l'invariant différentiel du troisième ordre du groupe*

$$x' = x, \qquad y' = \frac{ay + b}{cy + 1},$$

y *étant considéré comme fonction de* x.

N. B. — *Employer successivement les équations finies et les transformations infinitésimales du groupe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soient*

l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$;
A *le sommet* $y = 0$, $x = 1$;
O *le centre de l'hyperbole;*
M *un point de l'hyperbole et* MP *son ordonnée;*
OMA *le secteur mixtiligne, où* AM *est l'arc de l'hyperbole.*

Déterminer M *par la condition suivante :*

$$\text{aire secteur OMA} = \frac{3}{4} \times \text{aire triangle OMP.}$$

N. B. — *On posera*

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}\right)$$

et l'on calculera le u du point M.

(Novembre 1906.)

Nancy.

Épreuve théorique. — I. *Développement d'une fonction analytique uniforme d'une variable complexe au voisinage d'un point singulier isolé.*

II. *On considère l'équation*

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0.$$

1° *Démontrer qu'elle est irréductible dans le domaine de rationalité formé par les nombres entiers et fractionnaires.*

2° *Montrer que, si elle admet la racine x_1, elle admet en même temps la racine $x_2 = \dfrac{a x_1}{x_1 + b}$, où a et b sont deux nombres entiers convenablement choisis. Déterminer ces entiers.*

3° *Quels renseignements la propriété précédente donne-t-elle sur le groupe de Galois de l'équation ?*

4° *A l'aide de cette propriété, résoudre l'équation.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int \frac{\sqrt{z^2 + z - 2}}{[\log(1 + z)]^2}\, dz$$

étendue à la circonférence de rayon $\frac{1}{2}$ ayant pour centre le point $z = 0$ et parcourue dans le sens direct. On prendra pour le radical et le logarithme les déterminations *qui résultent, par continuité le long du rayon* Ox, *des déterminations initiales* $i\sqrt{2}$ *et* 0 *au point* O.

(Octobre 1906.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer qu'une fonction* $f(x)$ *de la variable réelle* x *finie et continue dans un intervalle* (a, b) *est développable en une série de polynomes entiers en* x, *uniformément convergente dans l'intervalle* (a, b).

Généraliser cette propriété pour une fonction $f(x)$ *finie et continue pour les valeurs réelles de* x.

II. *Déterminer une fonction analytique* $f(z)$ *de la variable complexe* $z = x + iy$ *par la condition que sa partie réelle soit une fonction de* $\dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$ *et que de plus on ait* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer les périodes de l'intégrale*

$$\int_0^z \sqrt[3]{1 - z^3}\, dz.$$

(Juin 1907.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Équations de Monge-Ampère. Origine de la forme de ces équations. Intégrales intermédiaires. Intégration des équations. Application à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables.*

II. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$p - q^2 = x + y + z.$$

Trouver l'intégrale z *qui se réduit à* $2y$ *pour* $x = 0$.

(Octobre 1907.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

où F *désigne un polynome indécomposable; soit* $z = \varphi(x, y)$ *une intégrale quelconque. Démontrer que, si cette inté-*

grale ne satisfait pas à la fois aux deux équations

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

elle sera donnée par le théorème de Cauchy. Définir les intégrales singulières de l'équation (1).

II. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$(1 - z)\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

et l'on pose

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n = t.$$

Chercher les intégrales qui ne dépendent que de x_1 *et de* t. *Trouver, parmi elles, celle qui se réduit à* $\frac{2-t}{1-t}$ *pour* $x_1 = 0$ *et écrire son développement en série pour les valeurs suffisamment petites de* t.

III. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles du second ordre*

$$z^2(rt - s^2) + z(1 + q^2)r - 2pqzs$$
$$+ z(1 + p^2)t + 1 + p^2 + q^2 = 0$$

et vérifier le résultat.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système*

$$x_3 p_1 + x_3 x_4 p_3 - (1 + x_4^2)p_4 - x_4 x_5 p_5 = 0,$$
$$x_3 p_2 + x_3 x_5 p_3 - x_4 x_5 p_4 - (1 + x_5^2)p_5 = 0,$$

en employant la méthode de Mayer. (Juin 1907.)

Toulouse.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(1 + p^2 + q^2) - (px + qy - z)^2 = 0$$

qui définit une famille de surfaces en coordonnées rectangulaires :

1° *Que devient cette équation si l'on fait un changement de coordonnées rectangulaires en conservant l'origine?*

2° *Former les équations différentielles des caractéristiques de cette équation. Montrer que les caractéristiques sont des courbes situées dans des plans passant par l'origine, et que ces plans coupent à angle droit les surfaces intégrales.*

Trouver la développée d'une caractéristique.

3° *Indiquer le mode de génération des surfaces intégrales qui résulte des résultats précédents et en conclure que la seconde famille de lignes de courbure est formée de courbes sphériques.*

II. *Soient une forme binaire biquadratique*

$$f(x, y) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 y + 6a_2 x^2 y^2 + 4a_3 xy^3 + a_4 y^4$$

et ses deux invariants

$$j_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \qquad j_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Soit $H(x, y)$ *le hessien de* $f(x, y)$.

Trouver la condition pour que les quatre points représentés par l'équation $H = 0$ *forment une division harmonique.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^3}}.$$

(Juillet 1907.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Soit la forme cubique*

$$f(x, y) = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3;$$

on demande de ramener $f(x, y)$ *à une somme de deux cubes, en employant la théorie des invariants, et de faire par cette méthode la discussion de l'équation* $f(x, y) = 0$.

(*On ne demande pas de donner l'expression explicite des racines.*)

II. *Soient* x, y, z *les coordonnées rectangulaires d'un* *point m d'une courbe gauche exprimées en fonction de l'arc s; soient u, v, w trois fonctions de s qui représentent les cosinus directeurs d'une droite passant par m et normale à la courbe. Les formules*

$$X = x + ut, \qquad Y = y + vt, \qquad Z = z + wt$$

représentent, en fonction des deux paramètres s et t, les coordonnées d'un point de la surface réglée la plus générale.

Former l'équation entre s et t qui définit les lignes asymptotiques de la surface. Utiliser cette équation pour trouver les surfaces réglées dont les rayons de courbure principaux sont en chaque point égaux et de signes contraires.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les variables u et z étant liées par l'équation*

$$u^2 - 4uz - 1 = 0,$$

calculer l'intégrale $\int \frac{dz}{u}$ *lorsque z décrit dans le demi-plan supérieur la demi-circonférence qui va du point* $z = -1$ *au point* $z = +1$.

On suppose que, pour $z = -1$, *u prend une valeur positive.* (Novembre 1907.)