NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LUCIEN GODEAUX

Un théorème sur les congruences de courbes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 134-135

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__134_0>

[N°3]

UN THÉORÈME SUR LES CONGRUENCES DE COURBES;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

1. Considérons une congruence N de courbes d'ordre k telle que par un point quelconque passent p courbes de cette congruence (ordre), et qu'une droite quelconque soit bisécante de q courbes du système (classe).

Les courbes de la congruence N marquent sur un plan π des groupes d'une homographie planaire H d'ordre $p(k-1)+1$ et de classe q. Cette homographie jouit de la propriété suivante : un point quelconque appartient à p groupes de l'homographie.

2. Les courbes de la congruence N qui s'appuient en un point sur une droite quelconque d engendrent une surface. Désignons par S_m cette surface, m étant l'ordre de la surface. En d'autres termes, soit m le nombre de courbes de la congruence N qui s'appuient sur deux droites quelconques.

La droite d est évidemment une droite multiple d'ordre p de la surface S_m.

Si l'on suppose que le plan π du n° 1 passe par la droite d, on voit que les points du plan π qui, avec les points de la droite d, forment des groupes de l'homographie H, engendrent une courbe c d'ordre $m-p$.

3. La courbe c rencontre la droite d en $m-p$ points.

Parmi ces points, il y en a $2q$ qui appartiennent aux groupes de l'homographie H qui ont deux points sur la droite d. Ils sont marqués par les courbes de la congruence N qui admettent d comme bisécante.

Les points restants se correspondent à eux-mêmes; ils ne peuvent donc provenir que des courbes de la congruence N tangentes au plan π. On sait que le lieu des points de contact des courbes d'une congruence avec un plan est une courbe. Si l'on désigne par n l'ordre de cette courbe, on a le théorème :

Si m est l'ordre de la surface engendrée par les courbes d'une congruence d'ordre p et de classe q s'appuyant sur une droite, et n l'ordre de la courbe lieu des points de contact des courbes de la même congruence avec un plan, on a

$$m - n = p + 2q.$$

Dans le cas où $p = 1$, l'homographie H devient une involution d'ordre k et le théorème est connu (¹).