Nouvelles annales de mathématiques

Farid Boulad

Construction des centres de courbures des lignes décrites pendant le déplacement d'une figure plane sur son plan

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 128-133

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__128_0>

[O8a]

CONSTRUCTION DES CENTRES DE COURBURE DES LIGNES DÉCRITES PENDANT LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE SUR SON PLAN;

PAR M. FARID BOULAD,
Ingénieur au Service des ponts des chemins de fer de l'État egyptien.

Nous nous proposons de donner ici deux nouvelles constructions géométriques, très simples, des centres de courbure des courbes décrites pendant le mouvement plan d'une figure plane invariable de grandeur dont deux points décrivent deux courbes connues dans le plan de cette figure.

Dans le cas particulier où les deux courbes connues sont des droites, nous avons été conduit à une construction géométrique très simple, comme celle donnée par M. Mannheim, pour le centre de courbure des coniques.

Nous justifierons ces constructions par une démonstration purement géométrique indépendante de la considération de ce mouvement comme étant un mouvement épicycloïdal.

Nos constructions consistent dans les deux solutions ci-après 1° et 2° de l'important problème de Cinématique [1].

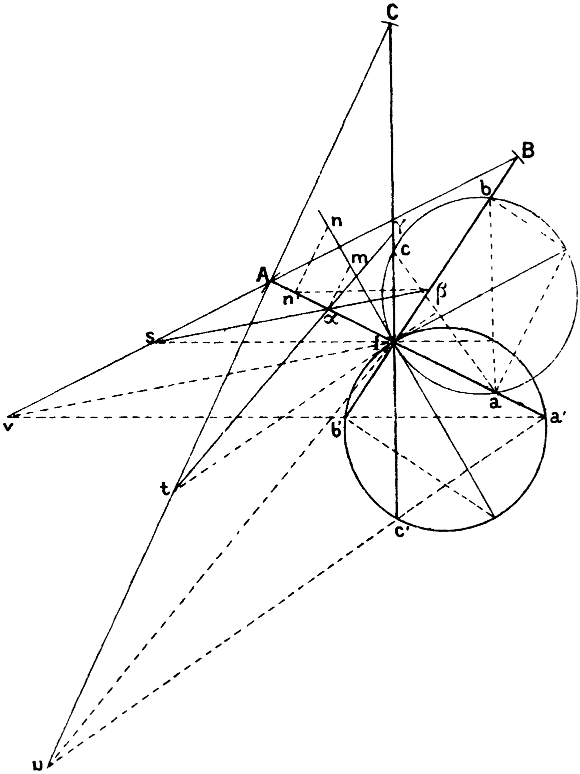
Une figure plane invariable de forme se déplace

---

[1] Qu'il nous soit permis de remercier ici le Dr Grindly, directeur de l'École polytechnique du Caire, pour avoir bien voulu nous renseigner sur les recherches déjà faites sur cette question.

sur un plan de façon que deux points A *et* B (*fig.* 1) *de cette figure restent respectivement sur*

Fig. 1.



deux courbes (A) *et* (B) : *on demande de construire le centre de courbure* γ *de la courbe* (C) *décrite par un point quelconque* C *de cette figure, connaissant, pour une position quelconque* AB, *les centres de courbure* α *et* β *respectivement relatifs aux courbes* (A) *et* (B).

1° *Si a et b sont les points de rencontre respectifs* *des deux normales* AI *et* BI *en* A *et* B *avec une perpendiculaire quelconque à la droite* Is *qui joint le centre instantané de rotation* I *au point de concours* s *des droites* AB *et* $\alpha\beta$, *le cercle circonscrit aux trois points* a, I, b *coupe orthogonalement, en* I, *le lieu de ce centre. Pour avoir le centre de courbure* γ *répondant à un point* C, *il suffit, si la normale* IC *rencontre en* c *le cercle* (aIb), *de joindre le centre de courbure* α *au point de concours* t *de la droite* AC *avec la perpendiculaire* It *à la corde* ac, *par une droite* $t\alpha$ *qui coupe, en* γ, *la normale* IC.

2° *Si, par le point de rencontre* v *de la droite* AB *avec la parallèle* Iv *menée par* I *à la droite* $\alpha\beta$, *on mène à la droite* Is *une parallèle qui coupe respectivement en* a' *et* b' *les deux normales* AI *et* BI, *le cercle circonscrit aux trois points* a'Ib' *est le cercle des inflexions de M. Bresse. Si l'on appelle* c' *le point de rencontre de ce cercle avec la normale* IC *et* u *le point de concours de la droite* AC *et de la corde* $a'c'$, *la parallèle menée par* α *à la droite* Iu *coupe* AC *au centre de courbure* γ.

DÉMONSTRATION.

1° Appelons θ et ω les angles que font respectivement les normales AI et BI avec un axe quelconque du plan de la figure. Désignons par d(A), d(B) et d(I) les différentielles des arcs des courbes (A), (B) et (I) aux points correspondants A, B, I. Soient m et n les points de rencontre de la normale In au lieu (I) avec les perpendiculaires élevées en α et β aux normales AI et BI. D'après la formule (III) indiquée dans le *Cours de Géométrie infinitésimale* de notre ancien professeur M. d'Ocagne, p. 259, on a

$$d(\mathrm{A}) = \mathrm{A}\alpha\, d\theta, \qquad d(\mathrm{B}) = \mathrm{B}\beta\, d\omega$$

et

$$d(\mathrm{I}) = \mathrm{I}m\, d\theta = \mathrm{I}n\, d\omega,$$

d'où

$$\frac{d(\mathrm{A})}{d(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{A}\alpha.\mathrm{I}n}{\mathrm{B}\beta.\mathrm{I}m};$$

mais, comme on a

$$\frac{d(\mathrm{A})}{d(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IB}},$$

on en déduit

$$\frac{\mathrm{A}\alpha.\mathrm{I}n.\mathrm{IB}}{\mathrm{B}\beta.\mathrm{I}m.\mathrm{IA}} = 1.$$

Or, le triangle $\alpha\mathrm{I}\beta$, coupé par la transversale $s\mathrm{AB}$, donne

$$\frac{\mathrm{B}\beta.\mathrm{IA}.s\alpha}{\mathrm{A}\alpha.\mathrm{IB}\; s\beta} = 1.$$

Multiplions membre à membre ces deux dernières relations, et appelons n' le pied de la perpendiculaire abaissée du point n sur IA; il vient

$$\frac{s\alpha}{s\beta} = \frac{\mathrm{I}m}{\mathrm{I}n} = \frac{\mathrm{I}\alpha}{\mathrm{I}n'},$$

ce qui montre que la droite $\beta n'$ est parallèle à Is, et, comme In est la normale au lieu (I), il en résulte la proposition suivante :

2° *Un cercle quelconque, tangent en* I *au lieu de ce point, détermine, sur deux normales quelconques* IA *et* IC *aux trajectoires de deux points quelconques* A *et* C *de la figure considérée, deux points a' et c' tels que la corde $a'c'$ est parallèle à la droite* It.

Or, en vertu d'un théorème bien connu de Géométrie élémentaire, si a et c sont les points de rencontre respectifs de deux droites quelconques IA et IC avec un cercle quelconque (aIc) qui coupe orthogonalement en un point I un autre cercle $(a'Ib')$, les deux cordes ac et $a'c'$ sont rectangulaires.

Par suite, la droite It est *perpendiculaire* à la corde ac.

3° Les droites vI et va' étant, par hypothèse, respectivement parallèles aux droites $s\beta$ et sI, on a

$$(1) \qquad \frac{AI}{A\alpha} = \frac{Av}{As} = \frac{Aa'}{AI}.$$

Pour démontrer que, dans ce cas, le cercle $(a'Ib)$ est le cercle des inflexions, il suffit de montrer que le centre de courbure répondant à un point quelconque c' de ce cercle est rejeté à l'infini.

Or, si nous appelons r le point de rencontre de la droite Ac' avec la perpendiculaire It à la corde ac, le point de concours des droites $r\alpha$ et Ic' est, d'après la construction (1°), le centre de courbure correspondant au point c'. Je dis que ces deux droites $r\alpha$ et Ic' sont parallèles.

En effet, la droite Irt est, d'après la proposition (3°), parallèle à la corde ac', et l'on a, en se rapportant aux rapports (1),

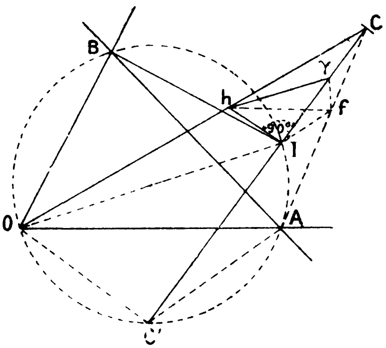
$$\frac{Ar}{Ac'} = \frac{AI}{Aa'} = \frac{A\alpha}{AI}.$$

Remarque. — Les constructions précédentes s'appliquent aussi à la recherche du centre de courbure de l'enveloppe d'une droite du plan d'une figure invariable, en déterminant le centre de courbure de la courbe décrite par le point qui est à l'infini sur la perpendiculaire abaissée de I sur la droite considérée.

FIGURE DONT DEUX POINTS DÉCRIVENT DES DROITES.

En appliquant la construction (3°), dans le cas particulier où les deux points A et B (*fig.* 2) restent sur

Fig. 2.



deux droites OA et OB, nous avons été conduit, pour ce cas, à la construction suivante très simple du centre de courbure γ de la trajectoire d'un point quelconque C :

Par le point h où la droite OC *coupe la perpendiculaire* I*h à* IC, *mener à la droite* OI *la parallèle h*λ *qui coupe* IC *au centre cherché* γ.

Cette construction se comprend aisément, par simple inspection de la figure et en remarquant que, d'après la proposition (3°), le cercle circonscrit au quadrilatère IBOA est tangent au lieu du centre instantané de rotation I, et que les deux figures c'AIO et I$f\gamma h$ sont homothétiques. Elles ont C comme centre d'homothétie.