NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FOUCHÉ

Sur le problème d'Apollonius

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 116-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__116_1>

[K12bα]

SUR LE PROBLÈME D'APOLLONIUS;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

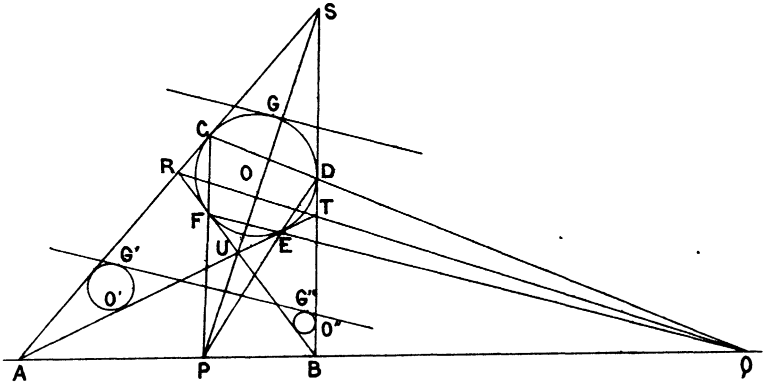
I. La méthode si remarquable que M. Bricard vient de faire connaître pour construire les cercles tangents à trois cercles donnés peut se déduire assez facilement de celle qui avait été indiquée autrefois par Poncelet et que j'ai publiée dans ce Recueil en 1892, la croyant alors nouvelle.

Soient (*fig.* 1) :

O, O′, O″ les trois cercles donnés;
A l'un des centres de similitude de O et O′;
B l'un des centres de similitude de O et O″;
AC, AE les tangentes communes des cercles O et O′ passant par A;
BD, BF les tangentes communes de O et O″ passant par B; C, D, E, F étant les points de contact de ces tangentes avec O.

La méthode de M. Bricard consiste à joindre CF et DE qui se coupent en P, ou CD et EF qui se coupent en Q. Ensuite, on mène au cercle O une tangente parallèle à l'une des tangentes communes aux cercles O′ et O″ qui passent par celui des deux centres de similitude de O′ et O″ qui se trouve sur l'axe de similitude AB, en ayant soin de choisir, parmi les deux tangentes parallèles au cercle O, celle qui est homologue de la tangente commune qu'on a choisie aux cercles O' et O''. Si G est le point de contact de cette tangente avec O, on joint GP et GQ qui rencontrent le cercle O

Fig. 1.



en deux autres points M et N. M et N sont les points de contact avec O des deux cercles tangents aux trois cercles donnés qui correspondent à l'axe de similitude AB.

Si l'on avait choisi la seconde tangente commune à O' et O'', on aurait retrouvé les deux mêmes points M et N.

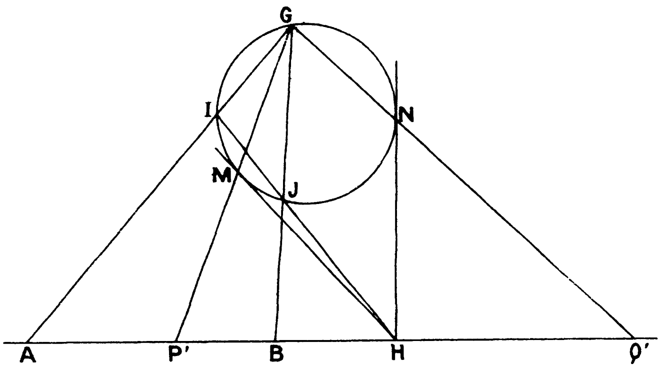
Une remarque très simple permet d'abord de modifier cette construction en diminuant d'une unité le nombre des lignes droites à tracer. Désignons par R, S, T, U les sommets du quadrilatère formé par les tangentes communes issues de A et de B. Il résulte d'abord du théorème de Pascal relatif à l'hexagone inscrit que les quatre points A, B, P, Q sont en ligne droite, c'est-à-dire que les points P et Q sont sur l'axe de similitude. De plus, les droites CF et DE doivent se couper sur la polaire du point Q par rapport au cercle O, laquelle n'est autre que la diagonale SU du quadrilatère circonscrit au cercle O. De même, la droite RT passe au point Q. Ainsi, les points P et Q, qui jouent un rôle si important dans la construction, sont les intersections de l'axe de similitude AB avec les diagonales du quadrilatère des tangentes communes issues de A et B.

Ajoutons que les points P et Q sont conjugués par rapport au cercle O, puisque SU est la polaire de Q et qu'ils sont aussi conjugués par rapport à AB, à cause de la propriété bien connue du quadrilatère complet. De là résulte une nouvelle définition de ces points : ce sont les points conjugués communs dans deux involutions définies sur la droite AB, l'une par les points doubles A et B, l'autre par le cercle O. Ces deux involutions sont bien distinctes, puisque les points A et B, n'étant pas sur le cercle O, ne sont pas les points doubles de l'involution des points conjugués par rapport au cercle.

Considérons maintenant la construction de Poncelet. Il faut mener un cercle isogonal aux trois cercles donnés, c'est-à-dire un cercle coupant les trois cercles donnés en trois points antihomologues, prendre l'intersection H avec AB de la corde commune à ce cercle isogonal et au cercle O, et mener de H deux tangentes au cercle O. Les points de contact sont les points cherchés M et N.

Or, G est l'homologue des points de contact G′ et G″ de la tangente commune aux cercles O′ et O″. Si donc on joint GA et GB, on obtiendra sur le cercle O deux nouveaux points d'intersection I et J qui seront respectivement antihomologues de G′ et G″, lesquels sont eux-mêmes antihomologues sur les cercles O′ et O″. Donc celui des cercles isogonaux qui passe par G′, G″, I passera aussi par J, et IJ (*fig.* 2) sera la corde com-

Fig. 2.



mune. Si H est l'intersection de IJ avec AB, c'est de H qu'il faudra mener les tangentes au cercle O. Soient HM et HN ces deux tangentes. Pour justifier la construction de M. Bricard en partant de celle de Poncelet, il suffira de démontrer que la droite GM passe au point P et la droite GN au point Q, les points P et Q étant définis comme précédemment.

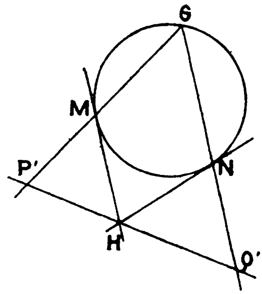
Soient P′ l'intersection de AB et GM, Q′ l'intersection de GN et AB. Il suffira de prouver que P′ et Q′ sont conjugués par rapport à AB et conjugués aussi par rapport au cercle O.

En premier lieu, les quatre points I, J, M, N, situés sur des droites issues de H, forment sur le cercle une involution dont M et N sont les points doubles. Donc le faisceau des quatre droites issues de G est harmonique, et il en est de même de la division que ce faisceau détermine sur AB.

La seconde propriété est une conséquence du théorème suivant :

Par un point G *d'une conique, menons deux sécantes* GM, GN, *puis les tangentes en* M *et* N (*fig.* 3),

Fig. 3.



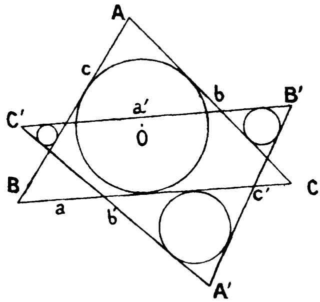
lesquelles se coupent en H. *Si une droite pivote autour du point* H, *elle déterminera sur* GM *et* GN *des points* P' *et* Q' *qui seront conjugués par rapport à la conique.*

En effet, les points P' et Q' forment deux divisions homographiques dont on connaît trois couples, savoir : 1° G, point commun; 2° M et l'intersection de HM avec GN; 3° N et l'intersection de HN avec GM. D'autre part, les points conjugués par rapport à la conique et situés respectivement sur les deux droites GM et GN forment aussi deux divisions homographiques qui admettent les mêmes couples. Donc la correspondance homographique est identique dans les deux cas, et les points P' et Q' sont bien conjugués par rapport à la conique. C. Q. F. D.

II. Dans le même article, M. Bricard a signalé deux théorèmes relatifs à quatre cercles tangents à un même cercle. Ces deux théorèmes peuvent se démontrer par l'application de la construction précédente.

Soient (*fig.* 4) deux triangles ABC, A′B′C′ ayant

Fig. 4.

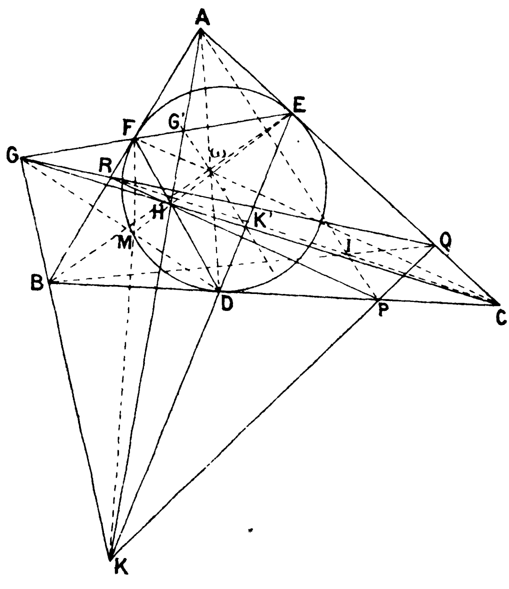


leurs côtés respectivement parallèles. Considérons sur ces côtés les semi-droites BC, CA, AB et les semi-droites de même sens C′B′, A′C′, B′A′, semi-droites que nous désignerons respectivement par a, b, c, a', b', c'. Le premier théorème consiste en ce qu'il existe un cycle tangent aux quatre cycles respectivement tangents aux systèmes de semi-droites : abc, $ab'c'$, $a'bc'$, $a'b'c$.

Proposons-nous de chercher le cycle tangent aux trois cycles abc, $a'bc'$, $a'b'c$, dont le premier sera désigné par O. Il faut d'abord chercher l'axe de similitude. Or, la droite AC est une tangente commune aux cycles O et $a'bc'$, et les points B et B′ d'où partent deux couples de tangentes respectivement parallèles sont homologues dans l'homothétie des deux cycles. Donc, le centre de similitude de ces deux cycles est le point d'intersection Q de AC et de BB′. Soient de même P et R les intersections respectives de BC et AC avec AA′ et CC′. L'axe de similitude cherché est la droite QR, et les droites PR et PQ sont les axes de similitude des deux autres systèmes de trois cycles comprenant le cycle O.

On peut remarquer que les trois droites AP, BQ, CR passent par le centre d'homothétie des triangles ABC, A′B′C′, ce qui nous dispensera à l'avenir de tracer le triangle A′B′C′. Il suffira, pour figurer les points P, Q, R, de joindre A, B et C à un point quelconque I du plan et de prendre les intersections des trois droites ainsi obtenues avec les côtés du triangle ABC (*fig.* 5).

Fig. 5.



Pour continuer la construction, il faut mener de Q et de R des tangentes au cercle O. Nous prendrons les côtés mêmes du triangle qui touchent le cercle en E et F; puis nous joindrons EF qui rencontre QR en G. Enfin, il faut joindre le point G au point de contact de la semi-droite tangente à O et parallèle à l'une des tangentes communes aux deux autres cycles. Or, B'C' est l'une de ces tangentes communes et BC, qui touche le cycle O en D, est bien la semi-droite tangente à O et parallèle à B'C'. Donc, nous joindrons GD, qui coupe le cycle O en un second point M; M sera le point de contact d'un cycle tangent aux trois cycles considérés. Le théorème sera donc démontré si l'on fait voir qu'on retrouve le même point M quand on répète la construction précédente en partant d'une autre combinaison du cycle O avec deux des trois autres cycles.

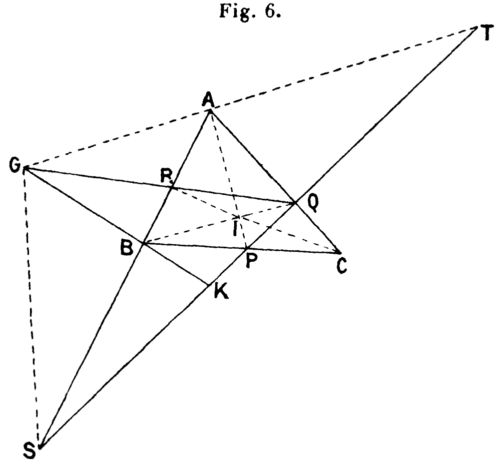
Si G, H, K sont les points d'intersection respectifs de EF et RQ, FD et PR, DE et PQ, il suffira de montrer que les droites GD, HE, FK passent par un même point situé sur le cercle O. Je dis que cela revient à prouver que le triangle GHK est autopolaire par rapport à ce cercle. Supposons, en effet, que G et K soient deux points conjugués par rapport à ce cercle, et soit M_1 l'intersection de GD avec FK. La polaire de G, par rapport à l'angle EKF, doit couper EF au point conjugué de G, et, comme elle passe au point K, elle se confond avec la polaire de G par rapport au cercle. Donc, elle coupe GD en un point qui est conjugué de G à la fois par rapport à M_1D et à MD, ce qui exige que les points M et M_1 se confondent, c'est-à-dire que M_1 soit sur le cercle O. On prouverait de même que EH passe aussi au même point M.

On peut ajouter que la polaire de G devant passer par H et par A, les trois côtés du triangle GHK passent respectivement par les trois sommets du triangle ABC.

Il reste à démontrer que le triangle GHK est autopolaire, ou, plus simplement, que G et K sont conjugués par rapport au cercle O.

A cet effet, considérons (*fig.* 6) un triangle ABC et

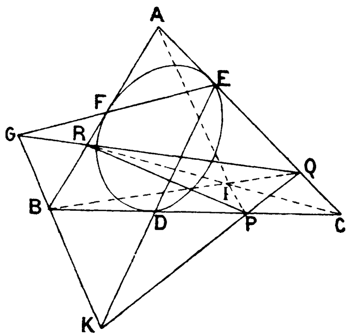
Fig. 6.



un point fixe G autour duquel nous ferons pivoter une droite qui rencontre AB en R et AC en Q. Joignons RC et QB qui se coupent en I, puis AI qui détermine sur BC un point P. Je dis que la droite PQ coupe BG en un point qui reste fixe quand RQ pivote autour de G. Soit, en effet, K ce point d'intersection, et soient aussi S et T les intersections respectives de PQ avec AB et GA. A cause du quadrilatère QIPC, la division ABRS est harmonique ; il en est donc de même du faisceau G.ABRS, de la division TKQS et enfin du faisceau A.TKQS ou A.GKCB. Donc AK est la polaire de G par rapport à l'angle BAC et le point K est fixe à l'intersection de GB avec cette polaire.

Cela posé, considérons (*fig.* 7) une conique DEF, inscrite dans le triangle ABC; D, E, F étant les points de contact. Prenons le point fixe G sur EF. Le point D peut être considéré comme une des positions du point P, puisque, d'après le théorème de Brianchon, les trois droites AD, BE, CF sont concourantes. Donc le point fixe K est à l'intersection de GB et ED. Comme le point K est sur la polaire de G par rapport

Fig. 7.



à l'angle A, laquelle est aussi la polaire de G par rapport à la conique, les points G et K sont conjugués par rapport à la conique ([1]). Si maintenant nous construisons le triangle PQR comme précédemment, en faisant passer RQ par G, la droite PQ ira passer au point K. Inversement, si l'on construit d'abord le triangle PQR en se donnant le point I, on prendra pour G l'intersection de EF et de RQ, et la droite PQ coupera la droite BG au point K conjugué de G par rapport à la conique. Or, c'est précisément la construction qui a été faite. Donc, le triangle GHK est bien autopolaire. C. Q. F. D.

([1]) Cela résulte aussi du théorème démontré dans la première Partie de ce travail, puisque la droite GK passe par le point B d'où partent les tangentes BD et BF.

Remarque. — Le point M ne dépend que du triangle ABC et du point I.

De plus, si l'on fait pivoter la droite RQ autour du point G, le lieu du point I, intersection des droites homographiques BQ et CR, est une conique qui passe, comme on le reconnaît facilement, par les trois points A, B, C et le point de concours ω des trois droites AD, BE, CF. Si le point G reste fixe, il en est de même des points H et K et, par conséquent, du point M. On peut donc ajouter au premier théorème de M. Bricard la remarque suivante :

Le cycle tangent aux quatre cycles considérés touche le cycle inscrit au triangle ABC *en un point qui reste fixe quand on remplace le triangle* A'B'C' *par un autre en conservant le centre d'homothétie des deux triangles ou même en déplaçant ce centre d'homothétie sur une conique circonscrite au triangle* ABC *et passant par le point de concours des trois droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact du cycle inscrit.*

On peut remarquer aussi que les côtés du triangle GHK sont tangents à cette conique.

Si l'on fait une perspective pour remplacer le cercle O par une conique, on obtient le théorème suivant :

Considérons une conique inscrite dans un triangle ABC *et le faisceau des coniques circonscrites à ce triangle et passant par le point de concours des droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact* D, E, F *de la conique inscrite. Le triangle formé par les tangentes en* A, B, C *à l'une quelconque des coniques du faisceau est homologique au triangle* DEF, *et le lieu du centre d'homologie est la conique inscrite considérée.*

Enfin, je signalerai les propriétés suivantes :

Nous savons déjà que les deux triangles GHK et DEF sont homologiques, avec M pour centre d'homologie. Je dis que l'axe d'homologie de ces deux triangles passe au point ω. En effet, soit (*fig.* 5) G'H'K' cet axe. G' est conjugué de G par rapport à EF et K' de K par rapport à ED. Donc, les trois droites GK, G'K', FD passent par un même point et forment un faisceau harmonique avec la droite qui joint ce point au point E. Alors la division déterminée par ce faisceau sur la droite BE doit être harmonique. Or précisément, à cause du quadrilatère BFωD, le point ω est conjugué du point B par rapport au segment compris entre E et FD. Donc, la droite G'H' passe bien au point ω.

Le triangle DEF est autopolaire par rapport à la conique des quatre points. En effet, la droite EF qui passe par G pôle de BC, puisque GB et GC sont deux tangentes, et qui coupe Aω au point conjugué de D par rapport à Aω à cause du quadrilatère AFωE, est bien la polaire du point D.

La tangente en ω à la conique des quatre points est l'axe d'homologie G'H'K', car le pôle de ω, devant être sur AH tangente en A et sur EF polaire de D, est en G'.

Enfin, le point M est le pôle de l'axe d'homologie des deux triangles ABC, DEF. En effet, le pôle de GD se trouve à l'intersection D' de BC, polaire de G, et EF, polaire de D. De même, les deux autres droites HE et KF, qui passent aussi en M, ont leurs pôles aux points E' et F', où se coupent CA et DF, puis AB et ED. La polaire du point M est donc bien la droite D'E'F'. *Ainsi la conique* DEF *est le lieu des pôles de la droite fixe* D'E'F' *par rapport aux coniques du faisceau.*

(*A suivre.*)