NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. REMY

Sur deux surfaces du quatrième ordre liées à l'octuple gauche complet

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 6-19

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__6_1>

[M²4m]

SUR DEUX SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE LIÉES A L'OCTUPLE GAUCHE COMPLET;

PAR M. L. REMY.

Cette Note a pour objet l'étude géométrique de deux surfaces du quatrième ordre que nous avons définies précédemment [1] au moyen des fonctions thêta à deux variables, et qui se trouvent liées à la configuration de l'espace à laquelle M. Fontené a donné le *nom d'octuple gauche complet* [2].

Il convient de rappeler la définition de l'octuple gauche complet : c'est la figure de l'espace formée par quatre couples de points :

$$(1, 1'), \quad (2, 2'), \quad (3, 3'), \quad (4, 4'),$$

tels que le plan déterminé par trois points pris dans les trois premiers couples passe par l'un des points du quatrième couple.

Ces plans sont au nombre de huit, répartis également en quatre couples :

$$\begin{array}{ll} P_1 : (4, 1, 2', 3'), & P'_1 : (4', 1', 2, 3), \\ P_2 : (4, 2, 3', 1'), & P'_2 : (4', 2', 3, 1), \\ P_3 : (4, 3, 1', 2'), & P'_3 : (4', 3', 1, 2), \\ P_4 : (1, 2, 3, 4), & P'_4 : (1', 2', 3', 4'), \end{array}$$

(1) *Comptes rendus*, 26 mars et 19 novembre 1906.

(2) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXIV, nos I et III.

et, corrélativement, ces quatre couples de plans sont tels que le point commun à trois plans pris dans les trois premiers couples appartient à un plan du quatrième couple.

I.

Il nous sera utile de résoudre tout d'abord le problème suivant :

Quel est le lieu des sommets des cônes du second ordre circonscrits à un octuple gauche complet ?

Le lieu des sommets des cônes appartenant à un réseau ponctuel de quadriques est en général une courbe du sixième degré. Dans le cas actuel, il comprend *les quatre droites d'intersection des couples de* plans de l'octuple $[P_1, P'_1], \ldots, [P_4, P'_4]$; la courbe résiduelle est donc soit une conique, soit un système de deux droites ne se rencontrant pas.

Nous écarterons la *première hypothèse en montrant* que la courbe rencontre en deux points chacune des quatre droites joignant les couples de points de l'octuple $[a_1, a'_1], \ldots, [a_4, a'_4]$. Considérons en effet parmi les quadriques circonscrites à l'octuple celles qui contiennent la droite $[a_i, a'_i]$; elles forment un faisceau ponctuel et se coupent toutes suivant la droite $[a_i, a'_i]$ et une cubique gauche Γ_i, laquelle passe par les six points de l'octuple autres que a_i, a'_i et rencontre la droite $[a_i, a'_i]$ en deux points.

Ceux-ci appartiennent au lieu géométrique, puisque la cubique est projetée de chacun d'eux suivant un cône du second ordre circonscrit à l'octuple. De là résulte que le lieu cherché se compose de deux droites Δ, Δ'.

Si nous remarquons enfin que chacune des droites Δ, Δ' rencontre nécessairement le plan P_i en un point de son intersection avec le plan P'_i, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Étant donné un octuple gauche complet, il existe deux droites Δ, Δ' rencontrant à la fois les quatre droites d'intersection d'un couple de plans et les quatre droites joignant un couple de points.

Chaque point de l'une de ces droites est le sommet d'un cône du second ordre passant par les huit points de l'octuple, et, corrélativement, chaque plan mené par l'une d'elles contient une conique tangente aux huit plans de l'octuple (¹).

Du fait que les points d'intersection de la droite $[a_i, a'_i]$ avec les droites Δ, Δ' appartiennent à la cubique Γ_i on déduit une proposition qui nous sera utile un peu plus loin : la quadrique Q_{ijk} définie par les trois droites $[a_i, a'_i]$, $[a_j, a'_j]$, $[a_k, a'_k]$ contient la cubique gauche Γ_i définie par les six points a_i, a'_i, a_j, a'_j, a_k, a'_k.

Enfin nous nous bornerons à énoncer les théorèmes suivants relatifs aux droites Δ, Δ' et dont il est aisé de donner une démonstration analytique :

Les points de rencontre de la droite (P_i, P'_i) *avec les droites Δ, Δ' sont les points doubles de l'involution déterminée sur cette droite par les quadriques circonscrites à l'octuple.*

De là le corollaire suivant :

(¹) La seconde partie de ce théorème a déjà été énoncée par M. Bricard qui y avait été conduit par une voie différente (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXIV, n° I).

Les plans P_i, P'_i *et les plans déterminés par la droite* $[P_i, P'_i]$ *avec les droites* Δ, Δ' *forment un faisceau harmonique; de même les points où les droites* Δ, Δ' *rencontrent la droite* $[a_i, a'_i]$ *divisent harmoniquement le segment* $a_i a'_i$.

Enfin le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de la droite Δ *avec les droites* $[P_i, P'_i]$ *est égal à celui des quatre plans déterminés par la droite* Δ *avec les droites* $[a_i, a'_i]$.

II.

Les théorèmes précédents nous permettent d'étudier la surface Σ dont voici la définition géométrique :

Elle est du quatrième ordre, elle admet pour points doubles les huit sommets de l'octuple et contient les quatres droites $[a_i, a'_i]$.

Cette surface dépend linéairement d'un paramètre, car toute surface du quatrième ordre à huit points doubles (formant groupe de Lamé) a une équation de la forme

$$f(P, Q, R) = 0,$$

où f désigne un polynome homogène de degré 2, et $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ les équations de trois quadriques passant par les huit points doubles. Or la surface Σ est assujettie de plus à quatre conditions linéaires.

Cette surface contient les quatre cubiques gauches Γ_i, car elle rencontre chacune d'elles en quatorze points, à savoir six points doubles et les deux points d'intersection de la cubique Γ_i avec la droite $[a_i, a'_i]$.

Considérons dès lors l'intersection de Σ avec la quadrique Q_{234} définie par les trois droites $[a_2, a'_2]$,

$[a_3, a'_3]$, $[a_4, a'_4]$: elle comprend ces trois droites et la cubique gauche Γ_1. La courbe résiduelle se compose de deux génératrices de système opposé aux droites $[a_2, a'_2]$, ..., $[a_4, a'_4]$.

En effet le long de toute biquadratique tracée sur la surface $f(P, Q, R) = 0$ et passant par les huit points doubles, on peut circonscrire une quadrique à la surface; soit donc Q_2 la quadrique circonscrite à S le long de la biquadratique formée par la droite $[a_2, a'_2]$ et la cubique Γ_2. Les quadriques Q_2 et Q_{234} sont tangentes en deux points de la droite $[a_2, a'_2]$ et, par suite, les génératrices d, d' de la quadrique Q_{234} qui passent par ces points y sont tangentes à la quadrique Q_2 et à la surface Σ, et dès lors sont situées tout entières sur cette surface.

D'où ce théorème :

Toute surface du quatrième ordre qui admet pour points doubles les sommets d'un octuple complet et contient les quatre droites $[a_i, a'_i]$ possède en outre quatre couples de droites d_i, d'_i, les droites d'un même couple d_i, d'_i rencontrant les trois droites $[a_j, a'_j]$, $[a_k, a'_k]$, $[a_l, a'_l]$.

Cette surface admet une génération géométrique simple : elle est l'enveloppe des quadriques Q circonscrites à l'octuple et tangentes à une droite d s'appuyant sur trois des droites $[a_i, a'_i]$.

Cette nouvelle définition est équivalente à la première, car la droite d et par suite l'enveloppe des quadriques Q dépend de *un* paramètre seulement, de même que la surface Σ; d'où cette conclusion :

Les quadriques circonscrites à un octuple gauche et tangentes à une droite d s'appuyant sur trois des droites (a_i, a'_i) sont tangentes à sept autres droites.

Les huit droites d forment une configuration qu'il est aisé de construire, dès que l'on se donne l'une d'elles d_1.

L'équation de la surface Σ dépend linéairement d'un paramètre : quand il varie, les deux droites d_i, d'_i qui appartiennent à un même système de génératrices de la quadrique Q_{jkl} sont en involution, et l'on reconnaît aisément que les génératrices doubles de cette involution sont les droites Δ, Δ'. Par suite, les points de rencontre des droites d_i, d'_i avec la droite $[a_j, a'_j]$ divisent harmoniquement le segment a_j, a'_j.

Considérons d'autre part les quatre coniques C_{123}, ..., C_{412} sections des quadriques Q_{123}, ..., Q_{412} par l'un des plans de l'octuple; la surface Σ coupe ce plan suivant deux coniques C, C', et les points d'intersection des coniques C, C' avec la conique C_{jkl} (en dehors des sommets de l'octuple) sont respectivement les traces des droites d_i et d'_i.

Ainsi, de la droite d_1 on déduit sans ambiguïté la droite d'_1, puis les coniques C. C' et, par suite, les trois autres couples d_i, d'_i.

III.

Nous avons établi [1] que les surfaces Σ sont hyperelliptiques, mais il y a des cas de dégénérescence.

Trois des surfaces Σ se décomposent en un couple de quadriques : ce sont les couples

$$[S_{12}, S_{34}], [S_{13}, S_{24}], [S_{14}. S_{23}],$$

S_{ij} désignant la quadrique qui passe par les huit som-

---

[1] *Comptes rendus* 26 mars 1906.

mets de l'octuple et contient les deux droites $[a_i, a'_i]$ et $[a_j, a'_j]$.

Supposons d'autre part que la droite d coïncide avec la droite Δ; dans ce cas les huit droites d_i, d'_i se confondent avec la droite Δ qui est une droite double de la surface Σ_0, et les deux coniques C, C' d'intersection de la surface avec chacun des plans de l'octuple sont confondues : la surface admet donc huit plans tangents suivant une conique. Il en résulte que la section de la surface par un plan quelconque mené par la droite double Δ est une conique tangente aux huit plans de l'octuple.

La surface admet donc deux définitions corrélatives : d'une part, elle est l'enveloppe de la famille des cônes du second ordre circonscrits à l'octuple dont les sommets sont situés sur la droite Δ; d'autre part, elle est engendrée par la famille de coniques tangentes aux huit plans de l'octuple dont les plans passent par cette même droite Δ.

Enfin la surface admet un plan tangent unique le long de chacune des droites $[a_i, a'_i]$, puisqu'on peut lui circonscrire un cône le long de cette droite.

Cette surface unicursale du quatrième ordre a été étudiée par Plücker. On peut donc considérer la surface de Plücker comme une dégénérescence de la surface hyperelliptique Σ.

IV.

Nous étudierons en second lieu une autre surface du quatrième ordre S qui se trouve également liée à la configuration de l'octuple complet et dont voici la définition :

Elle est du quatrième ordre et admet quatre plans tangents chacun le long d'une droite.

Pour construire une telle surface S on peut se donner les quatre plans P_1, P_2, P_3, P_4; mais les droites de contact $D_1, \ldots, D_4$ ne peuvent être prises arbitrairement dans ces plans. En effet, la surface S coupe le plan P_i, en dehors de la droite de contact, suivant une conique C_i, et celle-ci doit passer par les traces d_j, d_k, d_l, des droites D_j, D_k, D_l sur le plan P_i, et être tangente en ces points aux plans P_j, P_k, P_l. Ceci exige que les droites joignant respectivement les points d_j, d_k, d_l aux sommets A_j, A_k, A_l du tétraèdre formé par les plans P_i soient concourantes. Considérons d'autre part les plans P'_i déterminés respectivement par la droite D_i et le sommet opposé du tétraèdre A_i : ces plans forment un tétraèdre inscrit et circonscrit au premier; en d'autres termes, les huit plans P, P' constituent un octuple gauche complet.

Inversement soit un octuple complet : ses huit plans peuvent être, de quatre manières différentes, répartis en deux tétraèdres P, P' inscrits et circonscrits l'un à l'autre; chacun de ces tétraèdres permet de définir un système de quatre droites D_i et de quatre coniques C_i.

Prenons les plans P pour tétraèdre de référence, et soit $S_0(x, y, z, t) = 0$ l'équation d'une surface du quatrième ordre passant par les quatre coniques C et tangente aux plans P le long des droites D [1]; l'équation générale des surfaces S jouissant de cette propriété est de la forme

$$(I) \qquad S_0(x, y, z, t) + \lambda xyzt = 0.$$

[1] On reconnaît par un compte de constantes qu'il est possible de former effectivement une telle surface.

Au point de vue projectif l'octuple complet dépend de deux paramètres et la surface S de trois paramètres.

La surface S possède douze points doubles, trois sur chacune des droites D; en effet l'équation de la surface a la forme suivante :

$$D^2(x, y, z)\, C(x, y, z) + t.f(x, y, z, t) = 0,$$

$D(x, y, z) = 0$ et $C(x, y, z) = 0$ étant les équations de la droite de contact D et de la conique C dans le plan $t = 0$ et le polynome $f(x, y, z, t)$ étant du troisième ordre.

Les trois points d'intersection de la droite D avec la surface $f(x, y, z, t) = 0$ sont manifestement des points doubles de la surface.

L'équation (I) de la surface S dépend linéairement du paramètre λ; de là plusieurs conséquences géométriques.

Les points doubles a_i, b_i, c_i situés sur une même droite D_i appartiennent à une involution linéaire du troisième ordre. Cette involution se laisse définir simplement au moyen des droites D et des plans P. A cet effet considérons les droites Δ, Δ' qui s'appuient sur les quatre droites D: on peut déterminer le paramètre λ de manière que la surface S contienne la droite Δ, et dès lors celle-ci est une droite double, puisque ses points de rencontre δ_i avec les quatre droites D_i sont des points doubles de la surface (ce sont même des points-pince). Si l'on prend pour plans coordonnés $X = 0$, $Y = 0$ deux plans passant par la droite Δ et pour plan $T = 0$ le plan tangent le long de la droite D, l'équation de la surface prend la forme

$$(aX + bY)^2\, C(X, Y, Z) + T(PX^2 + QXY + RY^2) = 0,$$

P, Q, R étant trois polynomes homogènes du premier degré en X, Y, Z, T. On en déduit que l'involution des points a_i, b_i, c_i a deux de ses points confondus avec le point δ_i.

Cette involution est donc parfaitement définie puisque l'on connaît deux de ses points doubles, δ_i, δ'_i et, de plus, un groupe particulier formé par les points d'intersection de la droite D_i avec les plans P_j, P_k, P_l.

Les involutions du troisième ordre ainsi définies sur les quatre droites se correspondent homographiquement ; ceci résulte du théorème suivant dont la démonstration analytique ne présente pas de difficulté :

L'homographie H_{ij}, *qui fait correspondre respectivement aux points d'intersection de la droite* D_i *avec les plans* P_j, P_k, P_l *les points d'intersection de la droite* D_j *avec les plans* P_i, P_l, P_k, *fait correspondre les points d'intersection de ces droites avec chacune des deux droites* Δ, Δ'.

De là résulte que les points a_i, b_i, c_i, d'une part, et a_j, b_j, c_j, d'autre part, décrivent sur les droites D_i et D_j des divisions homographiques lorsque le paramètre λ varie.

Les propriétés précédentes permettent de déterminer sans ambiguïté les douze points doubles de la surface S dès qu'on se donne l'un d'eux. Nous allons en déduire quelques propriétés géométriques de la surface.

Considérons le faisceau des quadriques qui contiennent les droites D_3, D_4 et passent par les points d'intersection α_{13} et α_{24} de la droite D_1 avec le plan P_3 et de la droite D_2 avec le plan P_4. Elles déterminent sur les droites D_1 et D_2 une correspondance homographique qui coïncide avec l'homographie H_{12} puisqu'elle a avec elle trois couples communs : δ_1, δ_2 ; δ'_1, δ'_2 ; et les points d'intersection α_{14} et α_{23} de la droite D_1

avec le plan P_4 et de la droite D_2 avec le plan P_3. Par suite on peut mener une quadrique par les droites D_3, D_4, par les points α_{13}, α_{24} et par un couple quelconque a_1, a_2 de l'homographie H_{12}. On en déduit aisément qu'il existe une quadrique contenant les droites D_3, D_4 et passant par deux couples quelconques a_1, a_2 et b_1, b_2 de cette homographie. Ceci posé, soient une surface S quelconque, a_i, b_i, c_i ses douze points doubles; les huit points (a_i, b_i) forment un groupe de Lamé puisque l'on peut faire passer par ces points trois quadriques n'appartenant pas à un même faisceau.

Donc les douze points doubles de la surface S se répartissent en trois groupes de huit points de Lamé (a_i, b_i), (b_i, c_i), (c_i, a_i) (1). Par suite la surface peut être considérée de trois manières comme l'enveloppe d'une famille de quadriques passant par un de ces groupes de huit points et bitangentes à chacune des quatre coniques C.

Considérons celle des quadriques de la famille $Q_{a,b}$ qui passe par le point c_i; c'est nécessairement un cône de sommet c_i, circonscrit à la surface le long de la droite D_i et d'une cubique gauche qui passe par les sept points doubles c_i, a_j, b_j, a_k, b_k, a_l, b_l. La surface possède douze cubiques analogues Γ_{a_1}, Γ_{a_2}, ..., Γ_{c_4}.

V.

Parmi les surfaces S, il en existe quatre remarquables : ce sont celles pour lesquelles les involutions linéaires a_i, b_i, c_i ont un point double. Deux de ces sur-

(1) On pouvait prévoir *a priori* que la surface appartient à ce type d'après la classification des surfaces du quatrième ordre à 12 points doubles (ROHN, *Mathematische Annalen*, t. XXIX, 1887).

faces S_0, S'_0 sont celles qui admettent respectivement les droites Δ, Δ' pour droites doubles; elles sont engendrées par une conique dont le plan tourne autour de l'une des droites Δ, Δ' et qui rencontre en deux points chacune des coniques C.

Considérons les deux surfaces S_1, S'_1 correspondant aux autres points doubles de l'involution. Pour chacune d'elles les points a_i et b_i sont confondus : dès lors les huit cubiques gauches Γ_{a_i} et Γ_{b_i} sont confondues en une cubique Γ qui passe par les huit points a_i et c_i. Cette cubique est nécessairement une courbe double de la surface, puisqu'elle est projetée de chacun des points a_i suivant un cône circonscrit à cette surface.

Ainsi les surfaces S_1, S'_1 sont des surfaces du quatrième ordre à cubique double; elles peuvent être engendrées par une droite qui rencontre en deux points la cubique Γ et qui rencontre également les quatre coniques C. Comme les surfaces de ce type dépendent de dix-sept paramètres, on en conclut que les surfaces du quatrième ordre à cubique double, de première espèce (c'est-à-dire dont les réciproques sont du même type) sont une dégénérescence des surfaces hyperelliptiques S.

La cubique double de la surface S_1 rencontre la droite D_i en deux points : le point double de l'involution a_i, b_i qui est un point-pince de la surface, et le troisième point de l'involution c_i où elle est tangente au plan P_i. On reconnaît aisément que ce point coïncide avec l'un des points d'intersection de la droite D_i avec la conique C_i. Les points d'intersection des droites D_i avec les coniques C_i sont donc des points homologues dans les homographies H_{ij}.

En tout point de la cubique double Γ le cône circonscrit à la surface S_1 comprend le cône projetant la courbe double, qui doit être compté deux fois, et un cône du second degré. La surface S peut donc être regardée comme l'enveloppe d'une famille de cônes du second degré bitangents aux quatre coniques C.

Résumons en terminant la définition et les propriétés du système des droites D et des coniques C.

Soient P_1, P'_1, ..., P_4, P'_4 *les couples de plans d'un octuple gauche complet. Considérons d'une part les quatre droites* D_i *d'intersection de deux plans d'un même couple* P_i, P'_i *et, d'autre part, les quatre coniques* C_i *définies de la manière suivante : On répartit les huit plans de l'octuple en deux tétraèdres inscrits et circonscrits l'un à l'autre et l'on considère l'un de ces tétraèdres* P_1, P_2, P_3, P_4, *par exemple; la conique* C_i *est située dans le plan* P_i, *elle passe par les traces des droites* D_j, D_k, D_l, *sur ce plan et elle est tangente en ces points aux plans* P_j, P_k, P_l (1).

Le système des coniques C jouit des propriétés suivantes :

Les quadriques bitangentes aux quatre coniques C *forment une famille deux fois infinie.*

Il existe deux familles de cônes du second degré bitangents aux quatre coniques C *dont les sommets sont situés respectivement sur deux cubiques gauches et qui enveloppent deux surfaces unicursales du quatrième ordre* S_1, S'_1 (2).

---

(1) On peut répartir les plans de l'octuple en deux tétraèdres inscrits et circonscrits l'un à l'autre de quatre manières différentes et, par suite, étant donné un octuple complet, il existe huit systèmes analogues de quatre coniques C.

(2) On obtient quatre autres familles de cônes bitangents aux coniques C en considérant les cônes du second ordre circonscrits à une sur-

Il existe deux familles de coniques rencontrant en deux points chacune des coniques C; *les plans des coniques d'une même famille passent par l'une des droites* Δ, Δ' *qui s'appuient sur les quatre droites* D *et ces coniques engendrent une surface unicursale du quatrième ordre.*

Il existe quatre familles de droites rencontrant les quatre coniques C; *ce sont les deux systèmes de génératrices des deux surfaces* S_1 *et* S'_1.

Enfin les points où la droite D_i *rencontre les trois plans* P_j, P_k, P_l, *les droites* Δ, Δ' *et la conique* C_i *ont mêmes rapports anharmoniques quelle que soit la droite* D_i *considérée.*

Or nous avons remarqué au début de cette Note que les points de rencontre de la droite D_i avec les plans P_j, P'_j et avec les droites Δ, Δ' forment une division harmonique; en rapprochant cette remarque du théorème précédent, on obtient la proposition suivante :

Étant donné un octuple gauche complet, les points où la droite d'intersection de deux plans d'un même couple rencontre les six autres plans de l'octuple ont mêmes rapports anharmoniques, quel que soit le couple considéré.