Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 565-567

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__565_0>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Les coordonnées de chaque point d'une surface ont pour expression*

$$x = a + R\cos u, \qquad y = b + R\sin u, \qquad z = v,$$

u, v étant deux paramètres indépendants, a, b, R trois fonctions données de v.

1° *Donner la définition géométrique de cette surface et trouver le lieu des normales dont le pied décrit une génératrice donnée $v =$ const.*

2° *Former l'équation différentielle des trajectoires sous l'angle i des courbes $v =$ const. Cas particulier des trajectoires orthogonales. Interpréter géométriquement, dans ce cas particulier, l'équation trouvée.*

3° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques et déterminer les fonctions a, b, R par la condition que la surface soit minima. On déterminera par des quadratures, dans le cas général, le lieu du centre de la génératrice circulaire et la loi de variation de son rayon; ces quadratures pourront être effectuées à l'aide de fonctions simplement périodiques lorsque la surface sera de révolution et dans ce cas seulement. Achever le calcul dans ce cas particulier.* (Juillet 1907.)

Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère la surface* (S) *définie par les équations*

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = \alpha v + U,$$

dans lesquelles x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, u et v deux paramètres indépendants, α une constante donnée et U *une fonction de u.*

1° *Indiquer une génération simple de cette surface* (S) *et établir l'équation différentielle de ses lignes asymptotiques.*

2° *Déterminer la fonction* U *de manière que l'une des familles de lignes asymptotiques de* (S) *soit formée par les trajectoires orthogonales des courbes* $u =$ const.; *déterminer, dans ce cas, la nature de ces trajectoires.*

3° *La fonction* U *étant choisie de manière à satisfaire à la condition précédente, démontrer que, parmi toutes les surfaces de révolution applicables sur la surface* (S), *se trouve une caténoïde* (Σ). *Indiquer les formules qui réalisent l'application de* (S) *sur* (Σ).

4° *La fonction* U *etant toujours choisie de la même façon, déterminer la courbure totale de la surface* (S).

Épreuve pratique. — *Lignes de courbure de la surface représentée en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$x = \frac{1}{3}u^3 - uv^2 + \frac{u}{u^2+v^2},$$

$$y = u^2 v - \frac{1}{3}v^2 + \frac{v}{u^2+v^2},$$

$$z = 2u.$$

Solution.

1° La surface est un hélicoïde ; l'équation différentielle de ses lignes asymptotiques est

$$u\,\mathrm{U}''\,du^2 - 2\alpha\,du\,dv + u^2\,\mathrm{U}'\,dv^2 = 0.$$

2° Les trajectoires orthogonales des courbes $u =$ const. sont définies par

$$\alpha\,\mathrm{U}'\,du + (u^2 + \alpha^2)\,dv = 0;$$

pour qu'elles soient asymptotiques, il faut que U satisfasse à une équation dont l'intégrale est

$$\mathrm{U} = \frac{\sqrt{k^2u^2 = \alpha^2)}}{k^2} - \alpha \arcsin\frac{\alpha}{ku} + \mathrm{C},$$

k et C étant des constantes; les asymptotiques sont alors des droites faisant partie du complexe linéaire défini par le mouvement hélicoïdal qui engendre la surface.

3° L'expression de ds^2,

$$ds^2 = (u^2 + \alpha^2)\left(dv + \frac{\alpha\, du}{u\sqrt{k^2u^2 - \alpha^2}}\right)^2 + \frac{(1 + k^2)u^2\,du^2}{k^2u^2 - \alpha^2},$$

donne pour les surfaces de révolution applicables sur (S) les formules

$$r^2 = m^2(u^2 + \alpha^2), \qquad \theta = \frac{1}{m}\left(v - \arcsin\frac{\alpha}{ku}\right),$$

$$X = r\cos\theta, \qquad Y = r\sin\theta,$$

$$Z = \int\sqrt{\frac{(1 + k^2 - k^2m^2)r^2 + (1 + k^2)m^4\alpha^2}{k^2m^2r^2 - (1 + k^2)m^4\alpha^2}}\,dr,$$

où m est une constante; en posant $m^2 = \frac{1 + k^2}{k^2}$, la relation entre Z et r conduit à

$$r = \frac{(1 + k^2)\alpha}{k^2}\,\mathrm{ch}\,\frac{k^2Z}{(1 + k^2)\alpha},$$

ce qui définit une caténoïde.

4° La courbure totale est la même que pour la caténoïde :

$$-\frac{(1 + k^2)\alpha^2}{k^4r^4} = -\frac{\alpha^2}{(u^2 + \alpha^2)^2}.$$

Épreuve pratique. — Les lignes de courbure sont données par

$$v\,du^2 - 2u\,du\,dv - v\,dv^2 = 0$$

et sont

$$v^2 + 2cu - c^2 = 0.$$

(Juin 1906.)