Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 551-558

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__551_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un fil homogène pesant repose en équilibre sur deux aiguilles parallèles horizontales et de niveau projetées en* A *et* B *sur le plan vertical du fil.*

La distance des aiguilles est $2a$, *le paramètre de la chaînette intermédiaire est* c.

L'épaisseur des aiguilles étant négligée, on demande :

1° *De calculer la longueur totale* $2l$ *du fil;*

2° *De préciser la condition de stabilité de l'équilibre considéré.*

II. *Exposer sommairement la théorie de l'équilibre stable d'un flotteur pesant sur un liquide homogène pesant.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une roue de* 60 *dents* conduit *un pignon de* 6 *ailes. A l'instant où la dent de la roue va abandonner le flanc rectiligne du pignon, ce flanc fait avec la ligne des centres un angle* $a = 42° 15' 47''$.

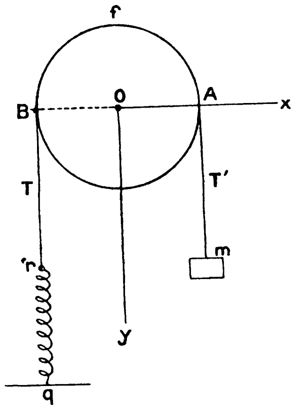
Connaissant le coefficient de frottement 0,15 *et le moment moteur* $P = 1$ *gramme-millimètre, calculer le moment résistant* Q. (Juin 1907.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Méthode de Roberval pour le tracé des tangentes; application à la cycloïde.*

II. *Énoncé du théorème de Coriolis; son application à la détermination de la courbure de la cycloïde.*

III. *Une poulie homogène de masse* M *et de rayon* R *est mobile sans frottement autour d'un axe horizontal passant par son centre et perpendiculaire à son plan.*



Sur cette poulie passe un fil sans masse mfr; à l'extrémité m est attaché un poids de masse m; l'autre extrémité est reliée à un ressort vertical élastique rq fixé par une extrémité au point q sur la verticale du point B. *Le ressort rq exerce sur le fil une tension* T *proportionnelle à l'allongement $l - l_0$ du ressort.*

Étudier le mouvement de la poulie et celui du poids m avec les conditions initiales suivantes : le ressort possède la longueur particulière l_0 qui ne donne lieu à aucune tension et le système est au repos, la masse m étant sur la verticale du point A, *et la longueur rBfAm étant égale à la longueur du fil. Calculer au cours du mouvement les tensions* T *et* T', *et la pression de la poulie sur son axe.*

On recherchera si, au cours du mouvement, la longueur $mAfBr$ peut devenir inférieure à la longueur totale du fil, auquel cas le ressort cesserait d'agir en r.

On supposera que le fil ne peut glisser sur la poulie.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque homogène, d'épaisseur négligeable, pesant* 20^{kg}, *a la forme d'un triangle équilatéral dont le côté vaut* $0^m,60$. *Elle peut osciller librement autour du côté fixe* BC *qui est horizontal, et est actuellement au repos, dans le plan vertical* ABC.

Une sphère, de rayon négligeable, pesant 1^{kg}, *vient, avec une vitesse de* 26^m *par seconde, perpendiculaire au plan* ABC, *choquer la plaque en* A, *et fait dès lors corps avec cette plaque.*

On demande de déterminer la vitesse angulaire initiale de la plaque ABC *autour de l'axe* BC.

(Novembre 1907.)

Grenoble.

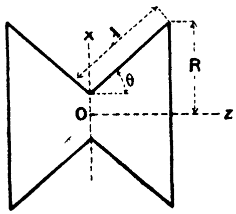
COMPOSITION. — *Un tube rectiligne homogène, de diamètre et d'épaisseur négligeables, a pour longueur* $2l$ *et pour masse* m. *Dans ce tube coulisse une tige homogène infiniment mince, de même longueur et de même masse.*

Le tube et la tige sont pesants; de plus le centre de gravité G *du tube et le centre de gravité* G′ *de la tige s'attirent proportionnellement à leur distance, l'attraction étant* $\frac{1}{2}mk^2$ *pour l'unité de distance. Le système est en outre assujetti à se mouvoir dans un plan vertical fixe* P. *Les liaisons sont sans frottement.*

Étudier le mouvement du système. On prend comme paramètres les coordonnées x, y *du centre de gravité* Γ *du système par rapport à des axes fixes* Ox, Oy *tracés dans* P, Oy *étant une verticale ascendante, la distance* $\rho = \Gamma G'$ *et l'angle* θ *de* $\Gamma G'$ *avec* Ox.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une tôle homogène rigide d'épaisseur négligeable a pour forme la surface extérieure de la figure constituée par deux troncs de cône égaux réunis par leur plus petite base.*

La masse par unité de surface est μ, *le rayon des* *grandes bases est* R, *la longueur des apothèmes est* l, *le demi-angle au sommet* θ.



1° *Déterminer les moments d'inertie du solide ainsi constitué, savoir :* C *moment par rapport à l'axe de révolution,* A *moment par rapport à un axe perpendiculaire passant par le centre de gravité;*

2° *Appliquer au cas où* $l = R$, $\theta = 30°$;

3° *Le solide étant animé d'une rotation de vitesse angulaire* ω *autour de son axe de révolution supposé horizontal, et d'une translation de vitesse* V *dirigée suivant la verticale descendante, reçoit, au point le plus bas de l'une des grandes bases, une percussion d'intensité* P, *normale au cône correspondant, dirigée vers l'axe. Déterminer l'état des vitesses immédiatement après la percussion.*

[*Pour cette question, on désignera par* M *la masse du solide, par* A *et* C *ses moments d'inertie, sans les remplacer par leurs valeurs.*]

4° *Appliquer le résultat trouvé aux données du n° 2°, en supposant de plus* $V = \dfrac{R\omega}{100}$ *et* $P = MV$.

(Novembre 1907.)

Lille.

Cours. — *Mouvement d'une sphère homogène glissant avec frottement sur un plan horizontal fixe dépoli. On étudiera successivement le cas où la vitesse initiale de glissement n'est pas nulle et celui où elle est nulle.*

Problèmes. — I. Cinématique. — *Soient* V *et* Γ *la vitesse et l'accélération d'un point quelconque d'un solide animé du mouvement le plus général.*

Trouver les lieux des points qui, dans le solide, *satisfont aux conditions;* 1° $V = \text{const.}$; 2° $\Gamma = \text{const.}$; 3° $V\Gamma\cos(V, \Gamma) = \text{const.}$; 4° Angle $(V, \Gamma) = \frac{\pi}{2}$. *Trouver enfin le lieu des points du corps qui, au même instant donné, sont points d'inflexion de leurs trajectoires.*

II. Dynamique. — *Un plan* Π *parfaitement poli est animé d'un mouvement hélicoïdal uniforme autour d'un axe vertical fixe; l'angle* α *constant de ce plan avec l'axe est tel que* $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Étudier le mouvement d'un point pesant astreint à se mouvoir sans frottement sur ce plan* π. (Novembre 1907.)

Nancy.

Épreuve écrite. — *Une plaque rectangulaire, homogène, pesante, est mobile autour de la droite* (d) *menée, dans cette plaque, par son centre de gravité* C *parallèlement au grand côté du rectangle. On imprime à cette droite* (d) *assujettie à rester toujours horizontale, un mouvement uniforme de rotation autour de la verticale menée par* C.

A l'une des extrémités de la droite (d') *menée dans la plaque, par* C, *parallèlement au petit côté du rectangle, on a soudé une petite masse pesante* m *que l'on envisagera ici comme un point matériel.*

A l'instant initial, la demi-droite qui va de C *vers* m *fait un angle de* 30° *avec la nadirale de* C *et n'a aucune vitesse initiale.*

La densité de la plaque est 7,7; *les longueurs des côtés du rectangle sont* 20^{cm} *et* 10^{cm}, *l'épaisseur de la plaque est* 1^{mm}; *la masse* m *est égale à* 7^{g}; *la droite* (d) *fait un tour complet autour du point* C *en une demi-seconde.*

On demande d'étudier le mouvement de la plaque autour de la droite (d); *on évaluera en particulier la durée d'une oscillation et les valeurs extrêmes de l'angle que fait la droite* (d') *avec la nadirale de* C.

Épreuve pratique. — *Un parallélépipède rectangle homogène a pour base un carré de* 1^{m} *de côté et pour hau-*

teur 1^{dm}. *Déterminer les points de l'espace pour lesquels l'ellipsoïde d'inertie de ce parallélépipède est une sphère.*

(Juin 1907.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un paraboloïde de révolution autour de son axe* Oz, *dirigé vers le zénith, tourne d'un mouvement uniforme autour de cet axe avec une vitesse angulaire donnée* $\omega > 0$

Un point matériel A, *de masse* m, *peut se mouvoir soit sur la surface (intérieure) du paraboloïde, soit dans sa concavité.*

A l'instant initial, on abandonne A *en un point donné* A_0 *de la surface du paraboloïde, situé à une distance* r_0 *de son axe, en lui imprimant une vitesse initiale* v_0 *tangente à la surface du paraboloïde.*

Le point matériel A *est pesant et il est, en outre, repoussé par le sommet* O *du paraboloïde; cette force de répulsion, dirigée suivant* OA, *est proportionnelle à la distance* R *des deux points* O *et* A; *son intensité à l'unité de distance est égale à* $\frac{mg}{p}$, *si* g *désigne la constante de la gravité et* $\frac{p}{2}$ *la distance du foyer du paraboloïde à son sommet.*

Étudier le mouvement du point A. *Discuter:*

Envisager en particulier le cas où la vitesse initiale de A *est horizontale et, plus particulièrement, celui où elle est (en outre) dirigée en sens contraire du mouvement de rotation du paraboloïde autour de son axe et où son intensité est égale au produit de* r_0 *par* ω.

Envisager aussi le cas où la vitesse initiale v_0 *est nulle et où* ω *est soit très grand, soit très petit.*

(Octobre 1907.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un cône de révolution homogène non pesant est fixé par son sommet en un point* O *et peut tourner autour de ce point.*

Tous ses points sont attirés par un point fixe A *proportionnellement à leur distance à ce point.*

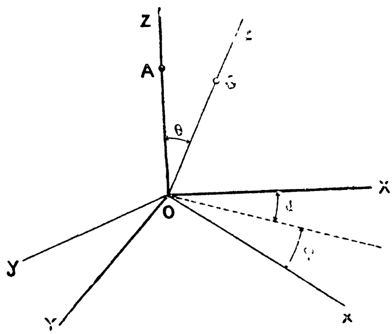
Cela posé, on demande :

1° *De déterminer les moments d'inertie du cône relativement à son sommet;*

2° *D'étudier toutes les circonstances du mouvement de ce cône;*

3° *D'indiquer les cas particuliers où l'on peut intégrer les équations du mouvement au moyen des fonctions élémentaires;*

4° *D'indiquer quelles devraient être les données initiales pour que l'axe du cône décrive rigoureusement un cône de révolution autour de* OA.



On déterminera la position du solide par les angles d'Euler θ, ψ, *qui fixent relativement à un trièdre invariable* OXYZ *la position du trièdre mobile* $Oxyz$ *lié au cône;* Oz *étant l'axe du cône,* Ox *et* Oy *deux axes perpendiculaires situés dans le plan de l'équateur. On donne le rayon de base* R *et la hauteur* H *du cône, sa densité* ρ, *la distance* $OA = a$, *la distance* $OG = b$ *du centre de gravité au sommet, les valeurs initiales* $\theta_0, \varphi_0, \psi_0, \theta'_0, \varphi'_0, \psi'_0$.

Examiner le cas où $R = 2H$.

Épreuve pratique. — *Dans un pendule sphérique de longueur* un *mètre, la position initiale du point pesant est sur un parallèle situé au-dessous et à une distance* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *mètre du centre. La vitesse initiale est dirigée suivant la tangente au parallèle et égale à* 20^m *par seconde.*

On demande de déterminer les parallèles limitant la trajectoire de l'extrémité du pendule; $g = 9^{m},81$.

(Juillet 1907.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On donne dans un plan horizontal deux masses* m, m' *reliées par un fil de longueur constante qui peut glisser librement dans un anneau fixé en* O.

On communique aux masses m *et* m' *des vitesses initiales quelconques dans le plan* mOm' *et l'on demande d'étudier le mouvement du système.*

1° *Établir les formules qui définissent les trajectoires des deux points;*

2° *Indiquer des cas dans lesquels les intégrations peuvent s'effectuer par les fonctions élémentaires;*

3° *Calculer la tension du fil;*

4° *Discuter complètement le problème dans le cas où l'une seulement des deux masses reçoit une impulsion initiale, l'autre masse étant primitivement au repos.*

On fera abstraction des frottements ainsi que de la masse du fil; on le suppose parfaitement flexible et inextensible.

(Novembre 1907.)