Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 549-551

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__549_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTEGRAL.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes définies en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation*

$$(x^2+y^2)^2+2b^2(y^2-x^2)=a,$$

où b est une constante déterminée et a un paramètre variable.

II. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+y,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-x.$$

III. *On considère la sphère et le paraboloïde représentés en coordonnées rectangulaires respectivement par les équations*

$$x^2+y^2+z^2-2z=0,$$
$$x^2+3y^2-4z=0.$$

Calculer l'aire de la portion de surface de la sphère qui est extérieure au paraboloïde.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

(Juillet 1907.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$2z^4\frac{\partial z}{\partial x} + 5xy\frac{\partial z}{\partial y} = 5zx.$$

1° *Trouver son intégrale générale;*

2° *Déterminer la surface* S *qui, rapportée à trois axes de coordonnées* Ox, Oy, Oz, *vérifie cette équation aux dérivées partielles et passe par la courbe définie par les équations*

$$x = 0, \qquad 4y + z^5 = 0;$$

3° *Exprimer les coordonnées* x, y, z *d'un point de* S *au moyen de deux paramètres* u *et* v *définis par les relations*

$$u + v = z, \qquad u^2 + v^2 = x,$$

et déterminer les lignes asymptotiques de cette surface S.

II. *Construire la courbe représentée en coordonnées cartésiennes par l'équation*

$$y = \int_1^x \frac{(x+a)\,dx}{x\sqrt{x^4-1}},$$

où a est une constante.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère le paraboloïde* P *qui, par rapport à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *a pour équation*

$$z = xy,$$

et, dans le plan des xy, la courbe C *qui, dans le système* *de coordonnées polaires de pôle* O *et d'axe polaire* Ox, *a pour équation*

$$r^2 = \cos\theta.$$

1° *Calculer l'aire de la portion du paraboloïde qui se projette sur le plan des* xy *à l'intérieur de la courbe* C *et dans l'angle des directions positives des axes;*

2° *Calculer le volume du cylindre projetant cette aire sur le plan des* xy, *ce cylindre étant limité au plan des* xy *et au paraboloïde* P.