Nouvelles annales de mathématiques

G. Dumas

Sur le problème du scrutin

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 546-549

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__546_0>

[J2c]

SUR LE PROBLÈME DU SCRUTIN;

PAR M. G. DUMAS.

Deux candidats A *et* B *sont en présence; un électeur bien informé sait à l'avance que* A *aura* m *voix et* B, n *voix,* m *étant plus grand que* n. *On demande la probabilité pour que* A *garde la majorité pendant tout le dépouillement du scrutin.*

MM. André (1) et Poincaré (2) ont résolu, chacun de leur côté, cet intéressant petit problème. Leurs solutions, ainsi que la suivante, ont de grandes analogies. Elles ne se distinguent que dans la manière, plus simple ici, d'établir l'égalité (6), $n_1 = n_2$, ci-dessous indiquée (3).

Supposons que le scrutin ait été dépouillé de toutes les façons possibles. Les bulletins, correspondant à chacun des dépouillements, se succèdent dans un ordre déterminé et constituent, dans leur ensemble, une permutation avec répétition de m lettres A et n lettres B.

Soient l le nombre total de ces permutations, k le nombre de celles dans lesquelles A conserve, d'un bout à l'autre, la majorité. La probabilité demandée est égale, par définition, à $\frac{k}{l}$, où

$$l = \frac{(m+n)!}{n!\,m!}. \tag{1}$$

(1) D. ANDRÉ, *Comptes rendus*, t. CV, 1887, p. 436 et J. BERTRAND, *Calcul des probabilités*, p. 18.

(2) H. POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, p. 21.

(3) *Voir* aussi E. CZUBER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, p. 34.

Il s'agit de déterminer la valeur de k.

Les permutations, qui se rapportent aux dépouillements dans lesquels A n'a pas la majorité d'un bout à l'autre des opérations, peuvent se répartir en deux classes.

Dans la première G_1, on mettra les n_1 permutations, dont la première lettre est B. Comme, au début même des dépouillements qui leur correspondent, A perd la majorité, les lettres A et B qu'elles renferment, à partir de la première B, se succèdent n'importe comment.

On a, par conséquent,

$$n_1 = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\,m!}. \tag{2}$$

La seconde classe G_2 renfermera les n_2 autres permutations, de même nature, commençant par A.

On a

$$n_1 + n_2 = l - k. \tag{3}$$

Si, pour fixer les idées, on prend $m = 5$, $n = 3$, l'une des permutations de G_1 sera, par exemple,

$$\alpha = (\mathrm{B, B, A, A} \mid \mathrm{B, A, A, A});$$

l'une des permutations de G_2,

$$\beta = (\mathrm{A, B} \mid \mathrm{B, A, A, A, B, A}).$$

Dans les seconds membres de α et β, les traits verticaux ont été tracés de façon qu'il y ait, à leur gauche, le même nombre de lettres A et B. De pareils traits pourront d'ailleurs toujours être menés dans chacune des permutations, supposées écrites, des classes G_1 et G_2, puisque, dans tous les dépouillements correspondants, A finit toujours par avoir la majorité. S'il arrive que plusieurs traits, ainsi définis, se rencontrent dans une même permutation, seul sera considéré comme tracé celui qui se trouve le plus à gauche.

Remplaçons maintenant, dans le premier groupe de lettres de α, les lettres A par des lettres B, et réciproquement. Laissons, en revanche, intactes les lettres du second groupe. La permutation α, de G_1, se transforme ainsi en une permutation

$$\alpha' = (A, A, B, B \mid B, A, A, A)$$

du groupe G_2, puisque α' commence par A et que, dans le dépouillement correspondant, A n'a pas toujours la majorité.

Toute permutation de G_1 se transforme, de la sorte, en une permutation de G_2. Comme la transformation, par laquelle on passe de α à α', conduit aussi de α' à α, deux permutations distinctes de G_1 auront comme correspondantes deux permutations également distinctes de G_2.

Les permutations de G_1 sont, par conséquent, en nombre égal ou inférieur à celui des permutations de G_2.

On a

$$(4) \qquad n_1 \leqq n_2.$$

On verrait, de la même façon, en partant des permutations β de G_2, que nécessairement

$$(5) \qquad n_2 \leqq n_1.$$

De (4) et (5) on déduit aussitôt

$$(6) \qquad n_1 = n_2.$$

Les classes G_1 et G_2 comprennent, chacune, un même nombre de permutations; la transformation indiquée les réunit par une correspondance univoque et réciproque.

On a donc, en vertu de (1), (2), (3) et (6)

$$k = \frac{(m+n)!}{n!\,m!} - 2\,\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\,m!} = \frac{(m+n-1)!}{n!\,m!}(m-n).$$

La probabilité, pour que A ait toujours la majorité, se réduit ainsi à

$$\frac{k}{l} = \frac{m-n}{m+n}.$$