Nouvelles annales de mathématiques

Charrasse

Sur un théorème relatif à la déformation des surfaces gauches

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 543-545

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__543_1>

[O4g]

SUR UN THÉORÈME RELATIF A LA DÉFORMATION DES SURFACES GAUCHES;

PAR M. CHARRASSE,
Répétiteur au Lycée de Nice.

Les *Nouvelles Annales* ont publié, dans le numéro de février 1889, une Note de M. Amigues sur l'équation générale des surfaces réglées dont la ligne de striction satisfait à certaines conditions et, dans le numéro de novembre 1895, une Note du même auteur sur les surfaces gauches dont une même courbe plane est à la fois ligne de striction et ligne de courbure.

Ces deux Notes avaient pour objet de montrer les applications d'une relation nouvelle et simple entre l'angle α d'une génératrice avec la ligne de striction et le paramètre de distribution ϖ de la génératrice, savoir :

$$\frac{\sin^2\alpha}{\varpi^2} = \sum\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2,$$

λ, μ, ν étant les cosinus des angles que la génératrice fait avec les trois axes de coordonnées rectangulaires, avec la condition $\Sigma\lambda^2 = 1$, s une variable auxiliaire représentant la longueur de l'arc de la ligne de striction compris entre un point fixe et un point variable.

Je me propose, dans cette Note, d'appliquer la formule de M. Amigues à la solution du problème suivant énoncé dans les *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, de M. Darboux (3e Partie, p. 312) :

Théorème. — *Toutes les surfaces gauches dont la ligne de striction coupe les génératrices à angle droit et pour lesquelles le paramètre de distribution des génératrices est constant sont applicables sur l'alysséide.*

Soient

$$x = f(s) + \lambda u,$$
$$y = \varphi(s) + \mu u,$$
$$z = \psi(s) + \nu u$$

les équations d'une génératrice; s et u sont deux variables indépendantes; λ, μ, ν fonctions de s; $f(s)$, $\varphi(s)$, $\psi(s)$ sont les coordonnées du point de contact de la ligne de striction avec la génératrice.

On doit avoir

$$\Sigma\lambda' f' = 0.$$

Exprimons que la ligne de striction est trajectoire orthogonale des génératrices. Il vient

$$\Sigma\lambda f' = 0.$$

La formule de M. Amigues donne

$$\Sigma\lambda'^2 = \frac{1}{\varpi^2} = \text{const.}$$

Or, l'expression de l'élément linéaire de la surface est donnée par

$$dS^2 = \Sigma\lambda^2\, du^2 + 2[u\Sigma\lambda\lambda' + \Sigma\lambda f']\, du\, dv$$
$$+ [u^2\Sigma\lambda'^2 + 2u\Sigma\lambda' f' + \Sigma f'^2]\, ds^2,$$

λ, μ, ν étant les cosinus directeurs de la génératrice

$$\Sigma\lambda^2 = 1, \qquad \Sigma\lambda\lambda' = 0.$$

Tenant compte des relations précédentes

$$dS^2 = du^2 + \left(u^2\frac{1}{\varpi^2} + \Sigma f'^2\right) ds^2.$$

Mais

$$\Sigma f'^2 = P^2 + \varpi^2,$$

P étant égal à l'u changé de signe du point central sur la génératrice, compté à partir de la trajectoire orthogonale $u = 0$.

Cette trajectoire correspond ici à la ligne de striction. Donc $P = 0$ et l'élément linéaire de la surface est donné par

$$dS^2 = du^2 + \left(\frac{u^2}{\varpi^2} + \varpi^2\right) ds^2$$

de la forme

$$dS^2 = du^2 + (au^2 + b)ds^2,$$

a et b étant deux constantes.

Cette forme caractérise l'alysséide. C. Q. F. D.