CH. MICHEL

Sur un théorème de M. Picard

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 539-543
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__539_1>

[N¹1K]

SUR UN THÉORÈME DE M. PICARD;

PAR M. CH. MICHEL.

Je me propose de donner une nouvelle démonstration du théorème suivant, dû à M. Picard :

La courbe gauche unicursale de degré m la plus générale dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire admet $2(m-3)$ points où la tangente a avec elle un contact du second ordre [1].

Les tangentes à la courbe faisant partie d'un complexe linéaire, les points de contact des plans osculateurs menés à la courbe d'un point quelconque P de l'espace sont, d'après un théorème de M. Appell, les points d'intersection de la courbe avec le plan polaire

[1] E. PICARD, *Application de la théorie des complexes à l'étude des surfaces et des courbes gauches* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1877).

du point P par rapport au complexe linéaire considéré. Si donc m est le degré de la courbe, ces points sont au nombre de m. *La classe de la courbe est égale à son degré.*

Cela posé, déterminons les plans qui passent par le point P et qui rencontrent la courbe en trois points confondus en un seul. Les coordonnées tétraédriques x, y, z, t d'un point quelconque de la courbe s'expriment au moyen de polynomes entiers par rapport à une variable λ :

$$x = f(\lambda), \qquad y = g(\lambda), \qquad z = h(\lambda), \qquad t = k(\lambda),$$

et l'on peut disposer de la représentation paramétrique ou du tétraèdre de référence de façon que les polynomes f, g, h, k soient tous les quatre de degré m. Soient α, β, γ, δ les coordonnées du point P. Si u, v, w, s sont les coordonnées tangentielles d'un des plans cherchés, on a d'abord

$$u\alpha + v\beta + w\gamma + s\delta = 0.$$

Ensuite, le paramètre λ du point de la courbe où viennent se confondre trois points d'intersection de la courbe et du plan est racine triple de l'équation

$$uf(\lambda) + vg(\lambda) + wh(\lambda) + sk(\lambda) = 0.$$

Autrement dit, si l'on rend cette équation homogène par l'introduction d'une variable μ qu'on regarde ensuite comme égale à 1, λ vérifie à la fois les trois équations

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} + v\frac{\partial^2 g}{\partial\lambda^2} + w\frac{\partial^2 h}{\partial\lambda^2} + s\frac{\partial^2 k}{\partial\lambda^2} &= 0,\\
u\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\mu} + v\frac{\partial^2 g}{\partial\lambda\,\partial\mu} + w\frac{\partial^2 h}{\partial\lambda\,\partial\mu} + s\frac{\partial k^2}{\partial\lambda\,\partial\mu} &= 0,\\
u\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} + v\frac{\partial^2 g}{\partial\mu^2} + w\frac{\partial^2 h}{\partial\mu^2} + s\frac{\partial^2 k}{\partial\mu^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que λ est l'une quelconque des racines de l'équation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 k}{\partial\lambda^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 k}{\partial\lambda\,\partial\mu} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial^2 k}{\partial\mu^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est de degré $3(m-2)$. Or, quand le point P varie, elle admet, comme nous l'avons vu, seulement m racines variables. Il en résulte que, quelle que soit la position du point P, elle admet $3(m-2)-m$ c'est-à-dire $2(m-3)$ racines fixes. Si l'on considère un des $2(m-3)$ points A de la courbe qui ont pour paramètres ces $2(m-3)$ racines fixes, il existe une infinité de plans rencontrant la courbe en trois points confondus avec ce point; autrement dit, tout plan tangent à la courbe en ce point rencontre la courbe en trois points confondus. Comme les tangentes à la courbe font partie d'un complexe linéaire, les $2(m-3)$ points A sont les points où la tangente a avec la courbe un contact du second ordre. Le théorème est démontré.

Pour être précis, il convient de montrer que l'équation (1) est effectivement de degré $3(m-2)$ et non de degré moindre, si la représentation paramétrique a été convenablement choisie. Posons

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \ldots, \\ g(\lambda) &= b_0\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + b_2\lambda^{m-2} + \ldots, \\ h(\lambda) &= c_0\lambda^m + c_1\lambda^{m-1} + c_2\lambda^{m-2} + \ldots, \\ k(\lambda) &= d_0\lambda^m + d_1\lambda^{m-1} + d_2\lambda^{m-2} + \ldots. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} = m(m-1)a_0\lambda^{m-2}+\ldots,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\mu} = (m-1)a_1\lambda^{m-2}+\ldots,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} = 2a_2\lambda^{m-2}+\ldots,$$

puis des expressions analogues des dérivées secondes de g, h, k. Il s'ensuit que le terme en $\lambda^{3(m-2)}$ dans l'équation (1) a pour coefficient

$$(\mathrm{T}) \qquad 2m(m-1)^2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Si, quelle que soit la position du point P, ce coefficient était nul, les déterminants du troisième ordre déduits du tableau (T)

$$\begin{Vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{Vmatrix}$$

seraient simultanément nuls. Mais je dis qu'il en résulterait qu'au point de paramètre ∞ la tangente aurait avec la courbe un contact du second ordre. En effet, exprimons qu'un plan de coordonnées tangentielles u, v, w, s rencontre la courbe en trois points confondus avec le point de paramètre ∞. L'équation

$$u f(\lambda) + v\, g(\lambda) + w\, h(\lambda) + s\, k(\lambda) = 0$$

doit avoir trois racines infinies ; par suite, on doit avoir les relations

$$ua_0 + vb_0 + wc_0 + sd_0 = 0,$$
$$ua_1 + vb_1 + wc_1 + sd_1 = 0,$$
$$ua_2 + vb_2 + wc_2 + sd_2 = 0,$$

qui sont linéaires et homogènes en u, v, w, s. Le tableau des coefficients de u, v, w, s est justement le tableau (T). Si les déterminants du troisième ordre déduits de ce tableau sont tous nuls, les équations en u, v, w, s admettent une infinité de solutions non proportionnelles entre elles. Il existe alors une infinité de plans rencontrant la courbe en trois points confondus avec le point de paramètre ∞. La tangente en ce point a donc bien avec la courbe un contact du second ordre. Or, il est possible de disposer de la représentation paramétrique propre sur la courbe de façon que la tangente au point de paramètre ∞ ait avec la courbe un contact ordinaire. Par suite, la représentation paramétrique étant convenablement choisie, l'équation (1) est effectivement de degré $3(m-2)$.