NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. HILLERET

Étude sur le calcul de π par des formules dérivées de la théorie des périmètres et des rayons

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 481-491

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__481_0>

[K10c]

ÉTUDE SUR LE CALCUL DE π PAR DES FORMULES DÉRIVÉES DE LA THÉORIE DES PÉRIMÈTRES ET DES RAYONS ;

Par M. G. HILLERET,

Professeur de sciences à l'École navale, en retraite.

1. Les calculs à effectuer pour obtenir la valeur de π, avec une certaine approximation, par les méthodes classiques des périmètres et des rayons sont, on le sait, des plus laborieux. Cette étude a pour but de montrer que si, au lieu de s'en tenir à ces procédés élémentaires, on formait des fonctions simples des périmètres et des rayons, on pourrait, assez rapidement et avec beaucoup moins de peine, obtenir des valeurs infiniment plus approchées de π et d'une convergence bien plus rapide.

2. Exposons d'abord rapidement les méthodes des périmètres et des rayons :

En désignant par $\overline{P_k}$ la longueur du demi-périmètre du polygone régulier convexe, de $N = n \times 2^k$ côtés, circonscrit à une circonférence de rayon arbitraire $\overline{A_k}$: par $\overline{p_k}$, la longueur du demi-périmètre du polygone régulier convexe, du même nombre N de côtés, inscrit dans une circonférence de rayon arbitraire $\overline{R_k}$; le nombre π n'est autre chose que la limite des rapports

$$\left.\begin{aligned} P_k &= \frac{\overline{P_k}}{\overline{A_k}}, \\ p_k &= \frac{\overline{p_k}}{\overline{R_k}}, \end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered}\text{et réciproquement } \frac{1}{\pi} \\ \text{est la limite des rapports}\end{gathered} \quad \left\{\begin{aligned} a_k &= \frac{\overline{A_k}}{\overline{P_k}}, \\ r_k &= \frac{\overline{R_k}}{\overline{p_k}}, \end{aligned}\right.$$

lorsque, n restant constant, k augmente indéfiniment.

Quelles que soient les longueurs des périmètres et des rayons, des polygones réguliers auxquels se réfèrent les rapports P, p, a, r, comme les polygones réguliers convexes du même nombre de côtés sont tous semblables, il en résulte qu'on a toujours

$$P_k = \frac{1}{a_k} \quad \text{et} \quad p_{k'} = \frac{1}{r_{k'}},$$

et que, si par un procédé quelconque de démonstration on prouve que

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{2P_0 p_0}{P_0 + p_0}, \\ p_1 &= \sqrt{P_1 p_0}, \end{aligned}\right\} \text{ on en déduira nécessairement } \left\{\begin{aligned} a_1 &= a_0 + r_0, \\ r_1 &= \sqrt{a_1 r_0}, \end{aligned}\right\} \text{ et } \textit{réciproquement.}$$

Calculer π par les valeurs successives P_k, p_k constitue la méthode des périmètres; nous appellerons *méthode des rayons,* celle qui consiste à calculer $\frac{1}{\pi}$ par les valeurs successives de a_k et r_k; cette appellation, que nous préférons à celle des *isopérimètres,* employée d'habitude, présente l'avantage de ne laisser rien préjuger sur le mode de démonstration des formules servant au calcul des éléments a_k ou r_k et rappelle, au contraire, la base théorique du procédé.

3. Afin de simplifier des démonstrations ultérieures, nous chercherons d'abord les limites des différences $P - p$ et $r - a$ en fonction de N.

Soit $\bar{c}$ la longueur du côté du polygone régulier convexe de N côtés ayant pour demi-périmètre $\bar{p}$ et pour rayon $\bar{R}$; on aura

$$p = \frac{\bar{N}c}{2\bar{R}} = \frac{Nc}{2},$$

et l'on démontre en géométrie que

$$P = \frac{Nc}{\sqrt{4 - c^2}},$$

$$p_1 = N\sqrt{2 - \sqrt{4 - c^2}},$$

on en déduit

$$P - p = \frac{P p_1^2}{2N^2} = \frac{P p P_1}{2N^2}.$$

Or Pp et P_1 diminuent quand N augmente; donc, pour $N \geq 6$, on aura

$$P^{(6)} p^{(6)} P^{(12)} > P p P_1 > \pi^3,$$

ou bien, comme $p^{(6)} = 3$, $P^{(6)} = 2\sqrt{3}$, $P^{(12)} = 12(2 - \sqrt{3})$,

$$[72(2\sqrt{3} - 3) = 33,415] > P p P_1 > 31,0063,$$

et finalement

$$\frac{15,5}{N^2} < P - p < \frac{16,71}{N^2} \qquad \text{pour} \qquad N \geq 6;$$

de la même façon, on aurait

$$r - a = \frac{P_1}{2N^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1,57}{N^2} < r - a < \frac{1,61}{N^2} \qquad \text{pour} \qquad N \geq 6.$$

4. Cherchons maintenant les limites des différences $P - \pi$ et $\pi - p$ en fonction de N.

Pour cela prenons la fonction $\frac{p + mP}{1 + m}$, dans laquelle m désigne un coefficient numérique positif.

Quel que soit m, la limite de $\frac{p + mP}{1 + m}$ étant égale à π, lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment, il est clair que $\frac{p + m\mathrm{P}}{1 + m}$ sera supérieur ou inférieur à π, si, à partir d'un certain rang, on a pour toute valeur de k

$$\frac{p_k + m\mathrm{P}_k}{p_{k+1} + m\mathrm{P}_{k+1}} \gtrless 1.$$

Afin de simplifier l'écriture supprimons l'indice k; l'inégalité deviendra

$$\frac{p + m\mathrm{P}}{p_1 + m\mathrm{P}_1} \gtrless 1,$$

ou bien, en remplaçant p et P par leurs valeurs en fonction de p_1 et P_1, et posant $x = \frac{\mathrm{P}_1}{p_1}$,

$$\frac{2 + (m-1)x^2}{x(2 - x^2)(1 + mx)} \gtrless 1,$$

et finalement

$$m \gtrless \left[\frac{2 - x^2}{x^2(1 + x)} = \mathrm{M}\right].$$

Or le deuxième membre de cette inégalité vaut $\frac{1}{2}$ pour $x = 1$, c'est-à-dire $\mathrm{N} = \infty$, et décroît en même temps que N; de plus la fonction $\frac{p + m\mathrm{P}}{1 + m}$, pour des valeurs finies et déterminées de p et P, augmente en même temps que m, et varie de p à P; donc pour $m \geqq \frac{1}{2}$, l'expression $\frac{p + m\mathrm{P}}{1 + m}$ est supérieure à π et en diffère d'autant plus que m est grand.

Quel que soit le nombre N des côtés des polygones P et p, on a donc toujours

$$\pi < \frac{\mathrm{P} + 2p}{3}.$$

Supposons maintenant que $p^{(8)}$ et $\mathrm{P}^{(8)}$ soient les demi-périmètres des octogones réguliers convexes, alors

$$x = 1{,}0196,$$
$$M = 0{,}456,$$

et, pour tous les polygones dont le nombre des côtés est $\geqq 8$, on aura

$$\frac{p + 0{,}456\,P}{1{,}456} < \pi;$$

mais, si P_0, p_0 sont les demi-périmètres des hexagones réguliers, la valeur

$$m_0 = \frac{\pi - p_0}{P_0 - \pi} = \frac{\pi - 3}{2\sqrt{3} - \pi} = 0{,}43903$$

donne évidemment

$$\frac{p_0 + m_0 P_0}{1 + m_0} = \pi.$$

Comme

$$0{,}456 > 0{,}43903 > \left[0{,}43902 = \frac{18}{41}\right],$$

on en conclut, *a fortiori*, que, pour $N \geqq 6$, on a

$$\frac{p + \frac{18}{41} P}{1 + \frac{18}{41}} < \pi,$$

c'est-à-dire, en résumé,

$$\frac{18P + 41p}{59} < \pi < \frac{P + 2p}{3},$$

que l'on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}(P - p) < P - \pi < \frac{41}{59}(P - p) \\ \frac{18}{59}(P - p) < \pi - p < \frac{P - p}{3} \end{array}\right\} \quad 2(\pi - p) < P - \pi < \frac{41}{18}(\pi - p),$$

exprimant $(P - p)$ en fonction de N (nº 3), on aura donc pour $N \geqq 6$

$$\frac{10,33}{N^2} < P - \pi < \frac{11,61}{N^2},$$

$$\frac{4,73}{N^2} < \pi - p < \frac{5,57}{N^2},$$

que l'on peut écrire

$$\pi = P - \frac{10,97}{N^2} \pm \frac{0,64}{N^2},$$

$$\pi = p + \frac{5,15}{N^2} \pm \frac{0,42}{N^2}.$$

Nous appellerons valeurs *rectifiées* de P et p les expressions $P - \frac{10,97}{N^2}$ et $p + \frac{5,13}{N^2}$.

5. Ces préliminaires établis, nous étudierons quelques combinaisons simples des éléments P, p, a, r; nous avons vu que $\frac{P + 2p}{3} = \varpi$ était une valeur par excès de π. Quelles sont les limites de $\varpi - \pi$ en fonction de N?

On a successivement

$$P_1 - p = \tfrac{1}{2}(P - p) - \frac{(P-p)^2}{2(P+p)},$$

$$P_1 - p = \tfrac{1}{2}(P - p) - \varepsilon \quad \text{en posant} \quad \varepsilon = \frac{(P-p)^2}{2(P+p)},$$

$$p_1 - P_1 = \tfrac{1}{2}(p - P_1) - \varepsilon' \quad \text{en posant} \quad \varepsilon' = \tfrac{1}{2}(P+p) - \sqrt{Pp},$$

. . . .

$$p_{k-1} - P_{k-1} = \tfrac{1}{2}(p_{k-2} - P_{k-1}) - \varepsilon'_{k-1},$$

$$P_k - p_{k-1} = \tfrac{1}{2}(P_{k-1} - p_{k-1}) - \varepsilon_{k-1};$$

ajoutant membre à membre

$$P_k - p = \tfrac{1}{2}(P - p_{k-1}) - \Sigma\varepsilon - \Sigma\varepsilon',$$

si k tend vers l'infini, on a $\lim P_k = \lim p_{k-1} = \pi$ et finalement

$$\pi = \frac{P+2p}{3} - \left[E = \tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon + \tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon'\right].$$

6. Cherchons les limites de E : commençons par $\Sigma\varepsilon$; on a

$$\varepsilon = \frac{(P-p)^2}{2(P+p)} < \frac{(P-p)^2}{4\pi} \Big\} \text{ car } P+p \text{ diminue quand N augmente,}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{(P_1-p_1)^2}{2(P_1+p_1)} < \frac{1}{16}\,\frac{(P-p)^2}{4\pi} \qquad \text{car} \qquad P_1 - p_1 < \frac{P-p}{4},$$

. . . .

$$\Sigma\varepsilon < \frac{(P-p)^2}{4\pi}\,\frac{16}{15} \qquad \text{et} \qquad \tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon < \frac{8}{45}\,\frac{(P-p)^2}{\pi}.$$

7. Cherchons la limite inférieure de $\Sigma\varepsilon$; on a

$$\varepsilon = \frac{(P-p)^2}{2(P+p)},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{P_1-p_1}{2(P+p_1)} = \frac{\alpha^2(P-p)^2}{2(P_1+p_1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{en désignant par } \alpha \text{ un coefficient numérique qui augmente} \\ \text{en même temps que N et a pour limite } \frac{1}{4}, \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_1 > \frac{\alpha^2(P-p)^2}{2(P+p)},$$

$$\varepsilon_2 > \frac{\alpha_1^2(P_1-p_1)^2}{2(P_2+p_2)} > \frac{\alpha^2\alpha_1^2(P-p)^2}{2(P_2+p_2)} > \frac{\alpha^4(P-p)^2}{2(P+p)}.$$

$$\Sigma\varepsilon > \frac{(P-p)^2}{2(P+p)}\,\frac{1}{1-\alpha^2};$$

or, pour tout polygone dont le nombre des côtés est $\geqq 6$, on a

$$\alpha \geqq 0{,}2361 \qquad \text{et} \qquad P+p \leqq 6{,}4641,$$

donc

$$\Sigma\varepsilon > \frac{(P-p)^2}{12{,}208}$$

et finalement

$$\tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon > \frac{(P-p)^2}{18,312}.$$

8. Cherchons les limites de $\Sigma\varepsilon'$; on a

$$\varepsilon'_1 = \tfrac{1}{2}(P_1+p)-\sqrt{P_1 p} < \frac{(P_1-p)^2}{8p_1} \quad \left\{ \text{car, d'une façon générale, } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8\sqrt{ab}}, \right.$$

$$\varepsilon'_2 < \frac{(P_2-p_1)^2}{8p_2} < \frac{(P_1-p)^2}{8p_2}\,\frac{1}{16} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{car } P_2-p_1=\lambda(P_1-p) \text{ en désignant} \\ \text{par } \lambda \text{ un facteur numérique qui} \\ \text{diminue en même temps que N et} \\ \text{a pour limite } \frac{1}{4}, \end{array} \right.$$

$$\varepsilon'_2 < \frac{(P_1-p)^2}{8p_1}\,\frac{1}{16},$$

. . . .

$$\Sigma\varepsilon' < \frac{(P_1-p)^2}{8p_1}\,\frac{16}{15} < \frac{(P-p)^2}{30p_1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{car } P_1-p = \dfrac{P-p}{1+x} \\ \text{en posant } 1 < x = \dfrac{P}{p} < 2, \end{array} \right.$$

$$\tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon' < \frac{1}{45}\,\frac{(P-p)^2}{p_1}.$$

9. Passons à la limite inférieure de $\Sigma\varepsilon'$; on a

$$\varepsilon'_1 > \frac{(P_1-p)^2}{8\pi} \quad \left\{ \text{car, d'une façon générale, } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}, \right.$$

$$\varepsilon'_2 > \left[\frac{(P_2-p_1)^2}{8\pi} = \frac{(P_1-p)}{8\pi}\lambda^2\right],$$

$$\varepsilon'_3 > \left[\frac{(P_3-p_2)^2}{8\pi} = \frac{(P_2-p_1)\lambda'^2}{8\pi}\right] > \frac{(P_1-p)^2}{8\pi}\lambda^4,$$

. . . .

$$\tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon' > \frac{(P_1-p)^2}{12\pi}\,\frac{1}{1-\lambda^2} > \frac{(P-p)^2}{12\pi}\,\frac{1}{(1+x)^2(1+\lambda^2)}.$$

Mais pour $N \geqq 6$, on a $x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $\lambda > \frac{1}{4,02}$, donc, enfin,

$$\tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon' > \frac{(P-p)^2}{164,2}.$$

Groupant les valeurs trouvées pour les ε et ε', on a donc

$$E = \frac{P+2p}{3} - \pi < \frac{(P-p)^2}{45}\left[\frac{8}{\pi} + \frac{1}{p_1}\right],$$

or, pour $N \geqq 8$ on a $p_1 \geqq 3,12144$ et $E > \frac{(P-p)^2}{15,7}$; mais on peut vérifier directement que cette inégalité est également satisfaite pour tous les polygones réguliers convexes dont le nombre des côtés est < 8; donc elle est vraie, quel que soit le nombre des côtés.

On a de même

$$E > (P-p)^2\left[\frac{1}{164,2} - \frac{1}{18,312}\right] > \frac{(P-p)^2}{16,5},$$

mais seulement pour $N \geqq 6$; en résumé,

$$\frac{(P-p)^2}{16,46} < \frac{P+2p}{3} - \pi < \frac{(P-p)^2}{15,6} \qquad \text{pour} \qquad N \geqq 6.$$

Substituant à $P-p$, les valeurs trouvées (n° 3), on a finalement

$$\frac{14,6}{N^4} < \varpi - \pi < \frac{17,8}{N^4}.$$

Par une analyse plus rigoureuse, on verrait que pour $N \geqq 6$, on a réellement

$$\frac{15,3}{N^4} < \varpi - \pi < \frac{16,98}{N^4}.$$

10. On démontre d'une façon analogue, mais un peu plus simple, qu'en posant

$$\varpi' = \frac{3}{a+2r} \qquad \text{on a} \qquad \frac{1,70}{N^4} < \pi - \varpi' < \frac{1,76}{N^4},$$

on en déduit alors très facilement que

$$\frac{2,55}{N^4} < \varpi'' - \pi < \frac{2,592}{N^4}, \qquad \text{en posant} \qquad \varpi'' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{r} + \frac{4}{a+r}\right)$$

et

$$\frac{1,31}{N^4} < \varpi''' - \pi < \frac{1,73}{N^4}, \qquad \text{en posant} \qquad \varpi''' = \frac{4}{4r_1 - r}.$$

Les valeurs $\frac{3}{a+2r} = \varpi'$ et $\frac{3}{4r_1 - r} = \varpi'''$ ont été indiquées, mais sans en préciser les limites d'erreurs, par MM. Rouché et Comberousse (*Géométrie élémentaire,* 1901, p. 201), c'est à ce titre que nous les avons choisies, parmi beaucoup d'autres du même genre.

11. Bien que ces formules fournissent des valeurs très supérieures, comme précision, à celles obtenues par P ou p, on peut former avec elles d'autres combinaisons donnant des résultats encore meilleurs : par exemple, l'expression

$$\Phi = \frac{3\varpi' + 2\varpi''}{5} = \frac{1}{15}\left(\frac{2}{r} + \frac{8}{a+r} + \frac{27}{a+2r}\right),$$

déjà signalée par nous-même (*Comptes rendus,* 18 mars 1907), est telle que pour $N \geqq 6$, on a

$$\pi = \Phi + \frac{0,59895}{N^6}$$

avec une erreur, en valeur absolue, inférieure à $\frac{35}{10^5 . N^6}$.

A titre documentaire, pour $N = 12$, la valeur rectifiée $\Phi + \frac{0,59895}{N^6}$ donne une valeur approchée de π, exacte à moins de $\frac{1,2}{10^{10}}$.

Malheureusement, ces nouvelles relations nécessitent pour être démontrées des connaissances mathématiques qui, bien que fort simples, sont encore trop élevées pour des élèves des classes élémentaires.