LUCIEN GODEAUX

Sur une surface du neuvième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 460-463
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__460_1>

[$M^2 9e$]

SUR UNE SURFACE DU NEUVIÈME ORDRE;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Dans cette Note, nous étudions une surface du neuvième ordre possédant deux droites multiples d'ordre *quatre* et sa représentation sur un plan.

1. Soient a_1, a_2 deux droites quelconques et R un réseau de surfaces cubiques ayant en commun 17 points A_1, A_2, A_3, ..., A_{17}.

La surface cubique du réseau R passant par les points P_1, P_2 pris respectivement sur les droites a_1, a_2 est encore rencontrée par la droite $P_1 P_2$ en un point P_3. Nous allons rechercher le lieu du point P_3 au moyen du principe de Chasles.

Soient (X_1), (X_2) deux ponctuelles de même support d.

Par le point X_1 menons la droite g s'appuyant sur a_1 et a_2. Les points (g, a_1) et (g, a_2) déterminent une surface du réseau R. Celle-ci marque sur la ponctuelle (X_2) trois points X_2.

Par un point X_2 passent une infinité simple de surfaces cubiques appartenant à R. Les droites qui joignent les points de rencontre de ces surfaces avec les droites a_1, a_2 engendrent une réglée. Cette réglée rencontre la ponctuelle (X_1) en six points X_1.

En effet, soient (Y_1), (Y_2) deux ponctuelles ayant comme support commun la droite a_1. Par un point Y_1 passe une surface cubique passant par le point X_2 choisi plus haut. Par les points d'intersection de cette surface avec a_2 menons les droites s'appuyant sur d et a_1. On détermine ainsi trois points Y_2. Inversement, par un point Y_2 menons une droite s'appuyant sur a_2 et d, et par le point de rencontre de cette droite avec a_2 une surface cubique passant par X_2. Celle-ci marque sur a_1 trois points Y_1. Les points Y_1 et Y_2 étant liés par une correspondance $(3,3)$ présentent six coïncidences.

Les points X_1 et X_2 sont donc liés par une correspondance $(6,3)$. Il y a neuf coïncidences, donc le point P_3 décrit une surface du neuvième ordre S_9.

2. Soit π un plan passant par la droite a_1. Les surfaces cubiques de R passant par le point $P \equiv (\pi, a_2)$ marquent un faisceau sur le plan π. On retrouve ainsi

dans ce plan une transformation connue depuis longtemps et étudiée par M. C. Le Paige, professeur à l'Université de Liége [C. LE PAIGE, *Sur deux transformations géométriques uniformes* (*Bull. de l'Acad. de Belgique*, 3e série, t. III et IV, 1883)].

On en déduit que toute section faite par un plan passant par l'une des droites a_1, a_2 est une courbe du cinquième ordre et donc que les droites a_1 et a_2 sont quadruples.

On vérifie aisément que les 17 points A_1, A_2, ... sont situés sur la surface. Remarquons en passant que, si l'un de ces points se trouve sur une droite a, tous les points du plan déterminé par ce point et l'autre droite a appartiennent à la surface. Celle-ci dégénère donc en un plan et une surface du huitième ordre.

Outre les droites a_1 et a_2, la surface contient 41 droites simples [G. DE VRIES, *Right lines on surfaces with multiple right lines* (*Proceedings of Amsterdam,* 28 avril 1902)].

3. Soient π un plan, B_1, B_2 les points d'intersection de ce plan avec les droites a_1, a_2. A un point Y de la surface S_9 on peut faire correspondre le point Y' du plan π commun aux plans (Y, a_1) et (Y, a_2).

Le lieu des points Y' correspondants des points d'une section par un plan passant par a_1 est une droite p_2 passant par B_2. De même, à une section par un plan passant par a_2 correspond une droite issue de B_1.

Cherchons l'ordre de la courbe α' image d'une courbe plane α de la surface. Les droites qui s'appuient sur a_1, a_2 et α engendrent une réglée du dixième ordre, car α est une courbe simple de cette réglée et il n'y a qu'une droite de cette dernière dans le plan de α. L'ordre de α' est donc 10.

Les points B_1, B_2 sont des points quintuples de α', car, si de B_1, par exemple, on projette la droite a_2 et la courbe α, il y a cinq rayons communs aux deux cônes qui rencontrent la droite et la courbe en des points différents.

La courbe α' passe évidemment par les points de rencontre du plan π avec les 41 droites simples de la surface rencontrées plus haut. Elle passe aussi par les points communs à α et π. Ces derniers points sont leur propre image.

Les courbes α' sont évidemment en nombre triplement infini. Trois points déterminent en général une et une seule de ces courbes.

4. Les courbes du neuvième ordre communes aux surfaces cubiques d'un réseau et s'appuyant sur une droite engendrent une surface d'ordre 24. Il y a donc 24 courbes du neuvième ordre c_9 s'appuyant sur les droites a_1, a_2 et passant par les points $A_1, \ldots, A_{17}$. Ces courbes appartiennent évidemment à la surface S_9, de même que les droites joignant les points (c_9, a_1) et (c_9, a_2).

L'image d'une telle courbe du neuvième ordre sur le plan π est une courbe du seizième ordre possédant deux points octuples en B_1 et B_2 et passant par les images des points $A_1, \ldots, A_{17}$ et par les points (π, c_9).