HAAG

Sur un réseau particulier de courbes coordonnées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 453-460

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__453_1>

[O5m]

SUR UN RÉSEAU PARTICULIER DE COURBES COORDONNÉES;

PAR M. HAAG,
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée de Douai.

Soient deux surfaces s et s_1 entre lesquelles on établit une correspondance quelconque. Je dis qu'il existe deux réseaux de courbes sur chaque surface qui ont même longueur que les courbes correspondantes. En effet, si l'on prend des courbes coordonnées se correspondant sur les deux surfaces, en égalant les éléments linéaires de s et de s_1, on obtient

$$(E - E_1)\,du^2 + 2(F - F_1)\,du\,dv + (G - G_1)\,dv^2 = 0,$$

équation qui définit bien sur chaque surface deux réseaux de courbes répondant à la question.

Nous écarterons le cas où la correspondance établie serait conforme, auquel cas on obtiendrait les lignes de longueur nulle, et aussi celui où les deux surfaces seraient applicables, cas où toutes les courbes des deux surfaces répondraient à la question.

Ceci étant, on peut se proposer d'étudier la correspondance entre les deux surfaces, en rapportant celles-ci aux réseaux de lignes qu'on vient de mettre en évidence. Nous ne ferons cette étude que pour la représentation sphérique d'une surface quelconque (s) *non minima et non applicable sur la sphère de* *rayon* 1, pour échapper aux deux cas particuliers écartés tout à l'heure.

Nous allons employer la méthode du trièdre mobile et nous nous reporterons pour cela aux formules de M. Codazzi, données dans le Tome II de la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (p. 384), formules que nous rappelons ici :

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2 + 2AC\cos\alpha\, du\, dv,$$

$$\xi = A\cos m, \qquad \eta = A\sin m, \qquad \xi_1 = C\cos n, \qquad \eta_1 = C\sin n,$$

$$n - m = \alpha;$$

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1, & r = -\dfrac{\partial n}{\partial u} - \dfrac{1}{C\sin\alpha}\left(\dfrac{\partial A}{\partial v} - \dfrac{\partial C}{\partial u}\cos\alpha\right), \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 - pr_1, & r_1 = -\dfrac{\partial m}{\partial v} + \dfrac{1}{A\sin\alpha}\left(\dfrac{\partial C}{\partial u} - \dfrac{\partial A}{\partial v}\cos\alpha\right), \\[2ex] \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - qp_1, & \begin{aligned} &A(p_1\sin m - q_1\cos m) \\ &\quad = C(p\sin n - q\cos n). \end{aligned} \end{cases}$$

$$d\sigma^2 = (p^2 + q^2)\, du^2 + (p_1^2 + q_1^2)\, dv^2 + 2(pp_1 + qq_1)\, du\, dv.$$

L'angle m désigne l'angle de Ox du trièdre mobile avec la tangente à $v =$ const. dans le sens des u croissants. De même, n est l'angle de Ox avec la tangente à $u =$ const. dans le sens des v croissants ; par suite $\alpha = n - m$ est l'angle des courbes coordonnées.

Ceci étant, pour que les courbes coordonnées aient même longueur que leur image sphérique, il faut et suffit que l'on ait

$$p^2 + q^2 = A^2, \qquad p_1^2 + q_1^2 = C^2,$$

équations auxquelles nous satisferont de la manière la plus générale en posant

$$p = A\cos\mu, \qquad q = A\sin\mu$$

et

$$p_1 = C\cos\nu, \qquad q_1 = C\cos\nu.$$

Portant ces valeurs dans la sixième formule (A), il vient

$$\sin(m - \nu) = \sin(n - \mu);$$

d'où

$$m - \nu = n - \mu \qquad \text{ou} \qquad m - \nu = \pi - (n - \mu).$$

En admettant la première hypothèse et la combinant avec les cinq autres équations (A), on arrive, après un calcul assez long, à la condition suivante :

$$AC \sin\alpha = 0,$$

qui donnerait un élément linéaire carré parfait et, par suite, une développable circonscrite au cercle de l'infini. Nous écartons cette solution peu intéressante et prenons la deuxième hypothèse, que nous écrivons :

$$\nu - m = n - \mu + \pi = \varphi;$$

d'où

$$\nu = m + \varphi, \qquad \mu = \pi + n - \varphi.$$

Les deux premières équations (A) deviennent alors

$$A \cos\mu \frac{\partial(\alpha - \varphi)}{\partial v} + C \cos\nu \frac{\partial(\alpha - \varphi)}{\partial u}$$
$$= \frac{2}{\sin\alpha}\left[-\frac{\partial A}{\partial v}\cos n \cos(\alpha - \varphi) + \frac{\partial C}{\partial u}\cos m \cos(\alpha - \varphi)\right],$$

$$A \sin\mu \frac{\partial(\alpha - \varphi)}{\partial v} + C \sin\nu \frac{\partial(\alpha - \varphi)}{\partial u}$$
$$= \frac{2}{\sin\alpha}\left[-\frac{\partial A}{\partial v}\sin n \cos(\alpha - \varphi) + \frac{\partial C}{\partial u}\sin m \cos(\alpha - \varphi)\right],$$

qui peuvent s'écrire, en posant $\alpha - \varphi = \theta$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} A \frac{\partial\theta}{\partial v}\sin(2\theta - \alpha) &= \frac{2\cos\theta}{\sin\alpha}\left[\frac{\partial A}{\partial v}\sin\theta + \frac{\partial C}{\partial u}\sin(\alpha - \theta)\right], \\ C \frac{\partial\theta}{\partial u}\sin(2\theta - \alpha) &= \frac{2\cos\theta}{\sin\alpha}\left[\frac{\partial A}{\partial v}\sin(\alpha - \theta) + \frac{\partial C}{\partial u}\sin\theta\right]. \end{aligned} \right.$$

Enfin, la troisième relation (A) devient

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{AC}\sin(2\theta-\alpha) = &-\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}\\
&+\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\left[\frac{\cos\alpha}{\mathrm{C}}\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial v}-\frac{\partial\log\mathrm{C}}{\partial u}\right]\\
&+\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\left[\frac{\cos\alpha}{\mathrm{A}}\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial u}-\frac{\partial\log\mathrm{A}}{\partial v}\right]\\
&-\frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathrm{C}}\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial u}\right)\right]\\
&+\cot\alpha\,\frac{\partial^2\log\mathrm{AC}}{\partial u\,\partial v}.
\end{aligned}
\right.
$$

On peut imaginer qu'on tire θ de cette dernière équation et qu'on porte dans les deux précédentes. On obtiendrait ainsi deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre par rapport à A, C et α, ce qui montre que, de ces trois fonctions, une seulement peut être choisie arbitrairement. Les deux autres seraient données par des équations fort compliquées que nous ne formerons que pour des cas particuliers.

Supposons donc que nous ayons obtenu un système de valeurs pour A, C, α et φ satisfaisant aux trois équations précédentes et voyons ce que deviennent les équations remarquables relatives à la surface, données par le Tableau de formules déjà signalé.

Lignes asymptotiques. — Leur équation s'écrit

$$\sin(\varphi-\alpha)(\mathrm{A}^2du^2+\mathrm{C}^2dv^2)+2\mathrm{AC}\sin\varphi\,du\,dv=0.$$

On voit que les lignes coordonnées seront asymptotiques pour

$$\alpha-\varphi=k\pi \qquad \text{ou} \qquad \theta=k\pi,$$

et dans ce cas seulement.

Les équations (1) nous donnent alors

$$\frac{\partial C}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial v} = 0,$$

ce qui permet de supposer $A = C = 1$, en faisant un changement de variables qui conserve les mêmes courbes coordonnées.

L'équation (2) devient alors

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \, \partial v} = \sin \alpha. \tag{3}$$

Si l'on remarque que u et v sont alors les longueurs des courbes coordonnées, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si les lignes asymptotiques d'une surface ont même longueur que leurs images sphériques, l'angle* α *de ces lignes, considéré comme fonction de leurs longueurs* u *et* v, *satisfait à l'équation* (3).

La réciproque de ce théorème s'énonce aisément.

A toute solution de l'équation (3) on pourra faire correspondre une surface (s) et une seule. En effet, si l'on se rappelle que l'angle m, par exemple, peut être choisi arbitrairement, on voit de suite que les translations et les rotations relatives au trièdre mobile seront déterminées dès que le sera α, et par suite on obtiendra une seule surface, à sa position dans l'espace près.

La détermination de cette surface dépendra, comme on sait, des deux équations de Riccatti suivantes :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -irx + \frac{q - ip}{2} + \frac{q + ip}{2} x^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -ir_1 x + \frac{q_1 - ip_1}{2} + \frac{q_1 + ip_1}{2} x^2,$$

qui deviennent, en supposant par exemple $m = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = i\frac{\partial \alpha}{\partial u}x - \frac{1}{2}(1 + x^2),$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}x^2).$$

Ces deux équations intégrées, on sera ramené à des quadratures.

Lignes de courbure. — Leur équation se réduit à

$$A\,du \pm C\,dv = 0,$$

d'où :

THÉORÈME. — *Sur une surface quelconque, les lignes qui ont même longueur que leur représentation sphérique sont également inclinées sur les lignes de courbure.*

Dans le cas particulier précédent, les lignes de courbure s'intègrent par quadratures et, dans l'hypothèse $A = C = 1$, leur équation est

$$u \pm v = \text{const.}$$

Rayons de courbure principaux. — Ils sont donnés par l'équation

$$\rho^2 \sin(\alpha - 2\varphi) - 2\rho\cos\varphi + \sin\alpha = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{RR'} = \frac{\sin(\alpha - 2\varphi)}{\sin\alpha}, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}.$$

On voit de suite que, dans le cas particulier examiné précédemment, on a

$$\frac{1}{RR'} = -1;$$

donc :

Théorème. — *Toute surface dont les lignes asymptotiques ont même longueur que leurs images sphériques est une surface à courbure totale constante égale à* — 1.

Réciproquement, si $\frac{1}{RR'} = -1$, on a

$$\alpha - 2\varphi = -\alpha + 2k\pi$$

ou

$$\alpha - 2\varphi = \pi + \alpha + 2k\pi.$$

La deuxième hypothèse ne convient pas, car elle donnerait $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0$.

La première nous donne $\alpha - \varphi = k\pi$, et nous retombons sur notre cas particulier. La réciproque du théorème précédent est donc vraie, comme cela résulte d'ailleurs de la formule d'Enneper relative à la torsion des lignes asymptotiques.

En outre, si l'on se reporte à ce qui a été dit plus haut, on voit comment *la détermination des surfaces à courbure totale constante négative se ramène à l'intégration de l'équation* (3) et à celle de deux équations de Riccatti.

Nous avons, de plus, une interprétation géométrique simple de cette équation (3).

On peut se proposer aussi de chercher si l'on peut avoir une courbure totale égale à $+1$, ce qui donnerait des surfaces applicables sur la sphère de rayon 1. Or, en écrivant que l'on a $\frac{1}{RR'} = +1$, on trouve immédiatement : soit

$$\varphi = k\pi \qquad \text{(solution à rejeter)},$$

soit

$$\alpha - \varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

auquel cas on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \pm 2$$

et, par suite,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} = \pm 1.$$

On retrouve donc une sphère de rayon 1. D'où :

THÉORÈME. — *On ne peut pas déformer une sphère de façon que le plan tangent en chaque point reste parallèle à lui-même.*

On peut se proposer, enfin, de chercher les surfaces à courbure moyenne ± 1. On retrouve d'abord la sphère de rayon 1 ; puis on trouve $\varphi + \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$. En portant cette valeur dans les équations (1) et (2), on aurait trois équations pour déterminer A, C et α. Mais elles ne sont pas simples et nous nous arrêterons là.