Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 402-403

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__402_0>

CORRESPONDANCE.

M. **W. Gallatly. M.-A.** (*Boscombe*). — *Sur l'application des coordonnées trilinéaires au cercle des neuf points.*

Soient D, E, F les milieux de BC, CA, AB;

X, Y, Z les points de contact avec le cercle inscrit.

Prenons DEF pour le triangle des coordonnées trilinéaires et appliquons les symboles a, b, c, ..., R, ... à DEF.

L'équation du cercle des neuf points est

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=0.$$

Prenons pour le cercle XYZ

$$k(a\alpha+b\beta+c\gamma)(l\alpha+m\beta+n\gamma)+\alpha\beta\gamma+\ldots=0.$$

Au cercle XYZ appliquons la méthode de Salmon (*Coniques*, p. 128).

Il en résulte que l'équation du cercle XYZ est

$$2\mathrm{R}(a\beta\gamma+b\gamma\alpha+c\alpha\beta)=a(b-c)^2\alpha+\ldots.$$

Les deux cercles ont

$$a(b-c)^2\alpha+\ldots=0$$

pour droite d'intersection.

Mais

$$a(b-c)^2\alpha+\ldots=0$$

est la tangente à

$$\frac{a}{\alpha}+\ldots=0$$

au point $\mathrm{P}\left(\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}\right)$.

Les deux cercles se touchent au point P.

Soient P_1, P_2, P_3 les points de Feuerbach pour les cercles exinscrits à ABC.

L'équation de la tangente à P_1 est

$$a(b-c)^2\alpha + b(c+a)^2\beta + c(a+b)^2\gamma = 0.$$

Si les tangentes à P et P_1 se coupent en Q, et les tangentes à P_2 et P_3 se coupent en Q', il en résulte que DQ est la bissectrice extérieure, et DQ' la bissectrice intérieure de l'angle D.

Le centre O du cercle ABC, ou l'orthocentre de DEF, est le point (séc A, séc B, séc C).

Le centre I du cercle inscrit est $\left(\frac{s-a}{a}, \frac{s-b}{b}, \frac{s-c}{c}\right)$.

Il en résulte que OI a pour équation

$$a(b-c)\cos A\,\alpha + \ldots = 0.$$

YZ coupe DE, DF aux points K, K', tels que

$$\mathrm{DK} = \mathrm{DK}' = a.$$

L'équation de YZ est

$$a^2\alpha + b(a-c)\beta + c(a-b)\gamma = 0.$$

Décrivons une parabole qui a pour foyer le point P et qui touche les côtés de DEF. L'équation de cette parabole est

$$a\sqrt{(b-c)\alpha} + \ldots = 0.$$

(SALMON, vers la fin du Chapitre XIV).

La directrice est

$$a\alpha(b-c)\cos A + \ldots = 0.$$

qui est OI.

YZ touche cette parabole, car

$$\frac{a^2(b-c)}{a^2} + \frac{b^2(c-a)}{b(a-c)} + \frac{c^2(a-b)}{c(a-b)} = 0.$$

Il en résulte que la parabole, qui a P pour foyer et OI pour directrice, touche les côtés de DEF et XYZ.