J. JUHEL-RÉNOY

Sur un problème de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 385-395

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__385_0>

[R4a]

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. J. JUHEL-RÉNOY.

C'est un théorème bien connu que les positions d'équilibre d'un point mobile dans un plan et soumis à l'attraction, en raison inverse de la distance, de n centres de même masse, situés dans ce plan et donnés par l'équation $f(z) = 0$, ont pour affixes les racines de l'équation dérivée $f'(z) = 0$.

Mais quelle est la relation de position entre les points racines du polynome $f(z)$ et ceux du polynome dérivé? C'est la question que je crois avoir résolue dans une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (19 mars 1906) et sur laquelle je me propose de revenir, avec quelques détails, dans le présent travail, en ajoutant aux résultats obtenus dans cette Note la solution du problème relatif au cas où certains centres sont attractifs et les autres répulsifs.

I. Soit d'abord le cas de trois centres, et, en premier lieu, de trois centres d'attraction dont les affixes sont racines de l'équation

$$f(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0,$$

les positions d'équilibre d'un point, mobile dans le plan des trois centres, soumis à l'attraction de ces trois centres en raison inverse de la distance, sont données par l'équation

$$f'(z) \equiv 3z^2 - 2(z_1 + z_2 + z_3)z + z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0.$$

Si l'on prend comme origine des coordonnées le centre de gravité du triangle des trois centres donnés et pour axes les axes principaux d'inertie du triangle relatifs à ce point, on aura les relations

$$z_1+z_2+z_3=0,$$
$$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=\tfrac{1}{2}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-\tfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2),$$

dans lesquelles

$$z_1=x_1+iy_1,$$
$$z_2=x_2+iy_2,$$
$$z_3=x_3+iy_3.$$

Or, en désignant par a et b les demi-axes de l'ellipse centrale d'inertie, M. E. Cesaro, dans un article sur la Géométrie du triangle (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. VI, p. 215), a démontré que

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=12a^2,$$
$$y_1^2+y_2^2+y_3^2=12b^2;$$

les positions d'équilibre sont donc données par l'équation

$$z^2=2(a^2-b^2),$$

qui indique qu'elles coïncident avec les foyers de l'ellipse tangente, en leur milieu, aux droites qui joignent deux à deux les centres d'attraction.

Soit, en second lieu, un point mobile attiré ou repoussé par un point A_1 et repoussé ou attiré par deux points A_2 et A_3, en raison inverse de la distance, le point mobile et les trois centres étant dans le même plan. Les positions d'équilibre sont données par l'équation

$$\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}-\frac{1}{z-z_3}=0.$$

En prenant pour origine A_1, elle devient

$$z^2 = z_2 z_3 = (x_2 + i y_2)(x_3 + i y_3)$$
$$= x_2 x_3 - y_2 y_3 + i(x_2 y_3 + x_3 y_2).$$

Le coefficient de i est nul si

$$\frac{y_2}{x_2} = -\frac{y_3}{x_3}.$$

Donc, les positions d'équilibre sont sur la bissectrice intérieure de l'angle A_1 du triangle $A_1 A_2 A_3$.

Or

$$x_2 = A_1 A_2 \cos\frac{A_1}{2}, \qquad y_2 = \quad A_1 A_2 \sin\frac{A_1}{2},$$

$$x_3 = A_1 A_3 \cos\frac{A_1}{2}, \qquad y_3 = -A_1 A_3 \sin\frac{A_1}{2},$$

d'où

$$z^2 = A_1 A_2 . A_1 A_3,$$

et, par suite, les positions d'équilibre coïncident avec les foyers de l'hyperbole, tangente en son milieu à la droite qui joint les deux centres qui sont de même nature, attractifs ou répulsifs tous les deux, et admettant comme asymptotes les deux droites joignant deux centres de nature différente.

On peut donc énoncer ce théorème :

Théorème I. — *Les positions d'équilibre d'un point mobile dans un plan et soumis à l'action attractive ou répulsive de trois centres de ce plan, de même masse, en raison inverse de la distance, coïncident avec les foyers d'une conique tangente, en leur milieu, aux droites joignant deux centres de même nature et asymptote aux droites joignant deux centres de nature différente.*

II. Il est facile d'établir un théorème analogue dans le cas d'un nombre quelconque de centres.

Considérons en effet, dans un plan, n points

$$A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$$

donnés par les équations

$$A_k \equiv u x_k + v y_k + 1 = 0.$$

L'équation

$$\sum \frac{1}{A_k} = 0$$

est l'équation tangentielle d'une courbe de classe $(n - 1)$ tangente, en leurs milieux, aux droites qui joignent deux à deux les points A_k. On voit d'ailleurs facilement que les tangentes menées à la courbe du milieu de $A_m A_p$, par exemple, et distinctes de $A_m A_p$, sont tangentes à la courbe de classe $(n - 3)$ tangente, en leurs milieux, aux droites qui joignent deux à deux les $(n - 2)$ points A_k autres que A_m et A_p.

Proposons-nous de trouver les foyers de la courbe

$$\sum \frac{1}{A_k} = 0.$$

Soient α, β les coordonnées rectangulaires d'un foyer et posons

$$z = \alpha + \beta i,$$
$$z_k = x_k + i y_k.$$

On a

$$v = ui,$$

d'où

$$A_k \equiv u x_k + v y_k + 1 = u z_k + 1,$$
$$u \alpha + v \beta + 1 = u z + 1 = 0$$

et, par suite,

$$A_k = u (z_k - z).$$

L'équation qui donne les affixes des foyers réels est donc

$$\sum \frac{1}{z - z_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée logarithmique du polynome

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

On a donc ce théorème que j'ai énoncé dans la Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (19 mars 1906) :

Théorème II. — *Les positions d'équilibre d'un point mobile attiré par n points fixes*

$$A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$$

de même masse, en raison inverse de la distance, coïncident avec les foyers réels d'une courbe de classe $(n-1)$ tangente, en leurs milieux, aux droites qui joignent deux à deux les centres d'attraction.

En particulier, si A_1, A_2, A_3 désignent les affixes des racines d'un polynome du troisième degré, les affixes des racines du polynome dérivé sont les foyers de l'ellipse tangente aux milieux des côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$ et ayant, par suite, pour centre le centre de gravité du triangle; dans le cas général, d'ailleurs, les affixes des racines d'un polynome ont même centre des moyennes distances que les affixes des racines du polynome dérivé.

III. On démontrerait, absolument de la même manière, que l'équation

$$\sum \frac{m_k}{A_k} = 0$$

représente une courbe de classe $(n-1)$ tangente aux $\frac{n(n-1)}{2}$ droites joignant deux à deux les points A_k, le point de contact divisant le segment A_kA_p dans le rapport $-\frac{m_k}{m_p}$, les foyers réels étant donnés par l'équation

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \sum \frac{m_k}{z-z_k} = 0,$$

dans laquelle

$$f(z) = (z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\dots(z-z_n)^{m_n},$$

et l'on aurait ce théorème (*Comptes rendus, loc. cit.*) :

Théorème III. — *Les positions d'équilibre d'un point mobile attiré par* n *centres fixes* A_k, *situés dans un plan, de masse* m_k $(k=1, 2, \dots, n)$, *en raison inverse de la distance, sont les foyers réels d'une courbe de classe* $(n-1)$ *tangente aux*

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

droites qui joignent deux à deux les n *points* A_k, *le point de contact de chaque segment* A_kA_p *le divisant dans le rapport* $-\frac{m_k}{m_p}$.

IV. On peut retrouver les résultats précédents d'une manière toute différente, en faisant usage d'une notion due à Laguerre, celle de l'orientation. On sait que :

« Étant donnés dans un plan deux systèmes de n droites A et B, et un axe fixe arbitraire H dans ce plan, si la somme des angles que font avec l'axe fixe les droites du système A est égale à un multiple de π

près à la somme des angles que font avec ce même axe les droites du système B, les deux systèmes A et B ont même orientation. Ils jouissent alors de cette propriété relativement à tout autre axe situé dans le plan. »

Soient alors $A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ les points-racines d'un polynome de degré n et $A'_h (h = 1, 2, \ldots, n-1)$ les points-racines du polynome dérivé. Prenons pour origine des coordonnées le point A_n, par exemple, et soit

$$f(z) = z(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{n-1})$$

le polynome dont les zéros donnent les points A_k ; les points A'_h seront donnés par les zéros du polynome

$$f'(z) = n(z - z'_1)(z - z'_2)(z - z'_3)\ldots(z - z'_{n-1}),$$

ce qui donne immédiatement la relation

$$n z'_1 z'_2 z'_3 \ldots z'_{n-1} = z_1 z_2 z_3 \ldots z_{n-1}$$

qu'on peut énoncer, sous forme de théorème, de la manière suivante, en vertu de la formule de Moivre :

Théorème IV. — *Le système des droites joignant un des points* A_k *à tous les autres points* A_k *a même orientation que le système des droites joignant le même point* A_k *aux* $(n-1)$ *points* A'_h.

Cela posé, considérons une courbe de classe $(n-1)$ ayant pour foyers les $(n-1)$ points A'_h et tangente aux droites joignant deux à deux les $(n-1)$ points A_k autres que A_n ; cette courbe devant satisfaire ainsi à un nombre de conditions égal à

$$2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

est déterminée.

Or, Laguerre a démontré que :

« Si, par un point situé dans le plan d'une courbe plane réelle de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, et si l'on joint ce point aux n foyers réels de la courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenus ont même orientation. »

Il résulte de ce théorème et de celui qui le précède immédiatement que la courbe que nous considérons est, en vertu de l'orientation, tangente aux droites joignant le point A_n aux $(n-1)$ autres points A_k. Il existe donc une courbe de classe $(n-1)$ ayant pour foyers les $(n-1)$ points A'_h et tangente aux droites joignant deux à deux les n points A_k.

Cette courbe est d'ailleurs tangente à chacune de ces droites en son milieu. En effet, l'origine des coordonnées étant quelconque, soit

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n),\\ f'(z) &= n(z-z'_1)(z-z'_2)\ldots(z-z'_{n-1}). \end{aligned}$$

L'orientation du système des tangentes menées de l'origine à la courbe étant, d'après le théorème de Laguerre, la même que l'orientation du système des droites joignant l'origine aux foyers réels, ne dépend que du produit

$$z'_1 z'_2 z'_3 \ldots z'_{n-1}.$$

Or, en représentant par S^p_q la somme des produits p à p des q quantités $z_1 z_2 \ldots z_q$, on a

$$z'_1 z'_2 \ldots z'_{n-1} = \frac{1}{n}\left[S^{n-2}_{n-1} z_n + z_1 z_2 \ldots z_{n-1}\right]$$

pour déterminer l'orientation des tangentes menées de l'origine à la courbe. Si l'origine est un point quelconque de $A_{n-1}A_n$

$$z_{n-1} = \alpha z_n,$$

$$z'_1 z'_2 \ldots z'_{n-1} = \frac{1}{n}(S_{n-1}^{n-2} + \alpha z_1 z_2 \ldots z_{n-2}) z_n$$

$$= \frac{1}{n}[z_{n-1} S_{n-2}^{n-3} + (\alpha + 1) z_1 z_2 \ldots z_{n-2}] z_n,$$

et si, en particulier, $\alpha = -1$,

$$z'_1 z'_2 \ldots z'_{n-1} = \frac{1}{n} S_{n-2}^{n-3} z_{n-1} z_n.$$

Le point de contact est donc le milieu de $A_{n-1}A_n$ et l'on voit, en outre, que le système des tangentes, autres que $A_{n-1}A_n$, menées de ce point à la courbe a même orientation que le système des droites joignant ce point aux foyers d'une courbe de classe $(n-3)$, tangente, en leurs milieux, aux droites qui joignent deux à deux les $(n-2)$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$. Ce résultat avait déjà été indiqué, sous une forme différente, au paragraphe II.

V. Ce qui précède permet d'établir un certain nombre de relations métriques, parmi lesquelles nous signalerons les deux théorèmes suivants :

Théorème V. — *Soient* $A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ n *centres d'attraction en raison inverse de la distance,* $A'_h (h = 1, 2, \ldots, n-1)$ *les positions d'équilibre d'un point soumis à l'action de ces centres. Le produit des distances d'un quelconque des centres aux* $(n-1)$ *positions d'équilibre est dans le rapport* $\frac{1}{n}$ *avec le produit des distances de ce centre aux* $(n-1)$ *autres centres.*

La démonstration résulte immédiatement de la relation

$$n z'_1 z'_2 \dots z'_{n-1} = z_1 z_2 \dots z_{n-1}.$$

THÉORÈME VI. — *Soient* $(\mathrm{C})_{n-1}$ *la courbe de classe* $(n-1)$ *tangente, en leurs milieux, aux droites joignant deux à deux les n points* $\mathrm{A}_k (k = 1, 2, \dots, n)$ *et* $(\mathrm{C})_{n-3}$ *la courbe analogue relative aux* $(n-2)$ *points* $\mathrm{A}_k (k = 1, 2, \dots, n-2)$, *le rapport du produit des distances du milieu de* $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ *aux foyers de* $(\mathrm{C})_{n-1}$ *au produit des distances du même point aux foyers de* $(\mathrm{C})_{n-3}$ *est égal à* $\frac{n-2}{n}\left(\frac{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}{2}\right)^2$.

Cet énoncé n'est que l'interprétation de la relation

$$z'_1 z'_2 \dots z'_{n-1} = \frac{1}{n} \mathrm{S}_{n-2}^{n-3} z_{n-1} z_n.$$

En particulier, si F et F′ sont les foyers de l'ellipse tangente aux milieux M, N, P des côtés d'un triangle ABC, on a les deux relations

$$\mathrm{AF}.\mathrm{AF}' = \frac{bc}{3},$$

$$\mathrm{MF}.\mathrm{MF}' = \frac{a^2}{12}.$$

VI. Nous n'avons jusqu'ici, sauf dans le cas particulier de trois centres, considéré que des centres d'attraction. Il suffirait, à la vérité, dans l'énoncé du théorème III, d'affecter d'un signe les coefficients m_k pour trouver un théorème relatif à des centres attractifs ou répulsifs. Le cas particulier, où les coefficients m_k sont tous égaux en valeur absolue, est, sans nul doute, plus intéressant que le cas général; il détermine, d'une façon complète, les positions d'équilibre d'un point mobile dans un plan et soumis à l'action, attractive ou répulsive, en raison inverse de la distance, de n centres de même masse situés dans ce plan.

Le théorème III s'énonce, en effet, dans ce cas, de la manière suivante :

Théorème VII. — *Les positions d'équilibre d'un point mobile dans un plan et soumis à l'action, attractive ou répulsive, en raison inverse de la distance, de n centres de même masse situés dans ce plan, coïncident avec les foyers d'une courbe de classe* $(n-1)$ *tangente, en leur milieu, aux droites qui joignent deux centres de même nature et asymptote aux droites qui joignent deux centres de nature différente.*

Remarque. — Il faut $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ conditions pour déterminer une courbe de classe $(n-1)$; par suite, n points étant pris dans un plan, si l'on considère une courbe de classe $(n-1)$ asymptote à $(n-1)$ des droites joignant deux à deux ces n points et tangente aux $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres, elle sera déterminée et sera, par suite, tangente aux $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ droites en leur milieu. Le cas particulier de trois centres donne la propriété fondamentale de la tangente à l'hyperbole.