Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 332-335
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__332_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2046.

(1905, p. 479.)

Soit $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$ *la droite de Simson relative à un point* O *du cercle* ABC. *Les parallèles à* OA, OB, OC *menées par l'orthocentre* O' de ABC *coupent* BC, CA, AB *en* λ', μ', ν' *et l'on a la droite* $\Delta'(\lambda', \mu', \nu')$. *Les droites* Δ, Δ' *se coupent sur le cercle d'Euler au milieu de* OO'. (P. Sondat.)

SOLUTION

Par A. Droz-Farny.

On sait que la droite de Simson du point O rencontre la droite OO′ en son point milieu, point du cercle d'Euler. Il suffira donc de démontrer que Δ' passe aussi par ce point O″.

Construisons la droite $O''\lambda'$ qui coupe OA en α. Il suffira pour cela de mener une droite B′C′ symétrique de BC par rapport à O″. Cette droite B′C′ rencontre OA en α et la droite $\alpha O''$ passe par λ'. Il est facile de démontrer que $O''\lambda'$ contient aussi μ' et ν'.

Soient A′, B′, C′ les symétriques de A, B, C par rapport à O″. Les côtés B′C′, A′C′, A′B′ coupent respectivement les droites OA, OB, OC en α, β, γ.

O″ appartenant au cercle d'Euler du triangle ABC, il existe une hyperbole équilatère passant par A, B, C, O′ et ayant O″ comme centre. Cette hyperbole contiendra donc les points A, B, C, O′, A′, B′, C′, O. Les deux triangles ABC et A′B′C′ inscrits dans la courbe sont homologiques, O″ étant le centre d'homologie. Il suffira donc, pour démontrer que les points $\alpha\beta\gamma O'$ *ou* $\lambda'\mu'\nu' O''$ sont en ligne droite d'appliquer le théorème de M. Aubert (*Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. VIII).

Si deux triangles ABC, A′B′C′ inscrits dans une conique sont homologiques et, si l'on prend un point O quelconque sur la conique, les points d'intersection α, β, γ, OA et B′C, OB et A′C′, OC et A′B′ sont situés sur une même ligne droite Δ' passant par le centre d'homologie O″.

Autre solution de M. Lez.

2048.

(1906, p. 480.)

Étant donné un triangle ABC, *on mène par le milieu* α *de la hauteur* AA′ *une demi-droite faisant avec* αA′ *un angle égal à la différence des angles* $\widehat{BAA'}$, $\widehat{A'AC}$ *et située dans le plus grand de ces deux angles. Cette demi-droite et les deux demi-droites analogues se coupent en un même point.* (A. Rogoff.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Si l'on désigne par O le centre du cercle circonscrit à ABC, on sait que AO et AA′ sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle BAC; par suite la demi-droite menée par α est parallèle à AO, c'est-à-dire perpendiculaire à B′C′.

Si, par A′, on mène la parallèle à la demi-droite considérée, on a une hauteur du triangle A′B′C′; par conséquent, les demi-droites de l'énoncé se coupent au milieu I de OH, H étant le point de concours des hauteurs des triangles A′B′C′.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si α', β', γ' sont les milieux de OA, OB, OC, les droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ se coupent au point I, en leur milieu; de plus, le point I est aussi le centre du cercle inscrit au triangle A″B″C″, ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle A′B′C′ (*voir* ROUCHÉ, *Traité de Géométrie* : Géométrie du triangle).

2053.

(1906, p. 528.)

La conique, qui touche les côtés d'un triangle donné ainsi que les perpendiculaires élevées du centre de son cercle inscrit aux droites qui joignent ce point aux extrémités de l'un de ces côtés, est tangente au cercle inscrit au triangle. (*Canon.*)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Soient O le centre du cercle inscrit au triangle ABC donné, OD et OE les perpendiculaires élevées de O aux droites OA et OB.

Considérons le faisceau tangentiel Γ des coniques défini par le cercle O et les points A et B, c'est-à-dire des coniques tangentes aux droites CA, CB, et en γ au cercle inscrit (γ point de contact de AB et du cercle O).

(OA, OB) et les droites isotropes passant par O étant deux couples de rayons homologues de l'involution déterminée par les tangentes issues de O aux coniques Γ, on en conclut que tous les couples de rayons homologues de l'involution considérée, sont formés par les droites également inclinées sur les bissectrices des angles des droites OA et OB.

En particulier, OD et OE sont homologues; donc, parmi les coniques Γ, il en est une tangente à ces deux droites.

Ce qui démontre la proposition.

Remarque. — La démonstration subsiste si, au lieu du cercle inscrit, on considère une conique tangente aux trois côtés du triangle, le centre du cercle étant remplacé par un foyer de la conique. On peut aussi remplacer les perpendiculaires à OA et OB par deux droites également inclinées sur les bissectrices des angles des droites OA et OB et énoncer la proposition plus générale suivante :

Étant donnée une conique de foyer O *inscrite dans un triangle* ABC, *si l'on désigne par* OD *et* OE *deux droites également inclinées sur les bissectrices des angles des droites* OA *et* OB, *la conique, tangente aux côtés du triangle et aux droites* OD *et* OE, *est tangente à la conique donnée.*

Autres solutions par MM. Droz-Farny et Laureaux.