NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FARID BOULAD

Sur la résolution graphique des équations linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 304-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__304_1>

[X4bγ]

SUR LA RÉSOLUTION GRAPHIQUE DES EQUATIONS LINÉAIRES;

PAR M. FARID BOULAD,
Ingénieur au Service des ponts des chemins de fer
de l'État égyptien.

Dans son cours de *Calcul graphique et Nomographie* qu'il a fait tout récemment à la Sorbonne (1),

(1) Ce Cours va être publié incessamment dans l'*Encyclopédie scientifique*, Doin, éditeur.

M. d'Ocagne a exposé les méthodes de résolution graphique des équations linéaires de MM. Massau et Van den Berg, sous une forme qui nous a conduit à trouver les nouveaux procédés suivants qui ne sont pas moins simples.

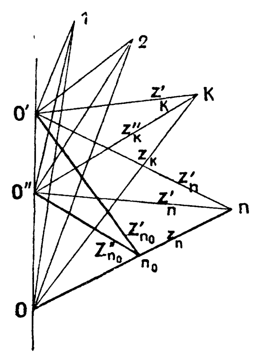
1. Nous donnerons d'abord deux nouvelles solutions graphiques du problème suivant :

a. Étant donnés deux systèmes de valeurs des inconnues satisfaisant à ($n-1$) *de* n *équations linéaires à* n *inconnues, déterminer graphiquement les valeurs des inconnues de ces* n *équations.*

La solution de ce problème permet de résoudre les équations linéaires en suivant la marche adoptée par M. d'Ocagne dans son cours de *Calcul graphique*.

Première solution. — Considérons les trois faisceaux de droites qu'on obtient en joignant un système de n points $1.2.3\ldots k\ldots n$ (*fig.* 1) à chacun des trois

Fig. 1.



pôles O, O′, O″ pris sur une même ligne de rappel (nom que M. d'Ocagne a donné dans son *Cours* à toute parallèle à Oy). Désignons par $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ les coefficients angulaires des rayons polaires $O\,1$, $O\,2$, $O\,3$, ..., $O\,n$ du premier faisceau et par $z'_1, z'_2, z'_3, \ldots, z'_n$ et $z''_1, z''_2, z''_3, \ldots, z''_n$ ceux des rayons polaires des deux autres faisceaux de pôles O' et O''.

Donnons-nous un système de n équations linéaires

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ r_0 + r_1 z_1 + r_2 z_2 + \ldots + r_n z_n = 0. \\ s_0 + s_1 z_1 + s_2 z_2 + \ldots + s_n z_n = 0. \end{array}\right.$$

Démontrons la proposition suivante :

b. Si chacun des deux systèmes de coefficients angulaires $z'_1, z'_2, z'_3, \ldots, z'_n$ et $z''_1, z''_2, z''_3, \ldots, z''_n$ relatifs aux pôles O' et O'' satisfait à $(n-1)$ de ces n équations, aux $(n-1)$ premières par exemple, le système des coefficients $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ relatif au pôle O satisfait aussi à ces $(n-1)$ équations, quelle que soit la position de ce dernier pôle sur la verticale des deux pôles arbitraires O' et O''.

En effet, posons $\frac{O''O}{O'O''} = \alpha$; les trois rayons polaires Ok, $O'k'$, $O''k''$ de coefficients angulaires z_k, z'_k, z''_k donnent

$$\frac{z_k - z''_k}{z''_k - z'_k} = \frac{O''O}{O'O''} = \alpha$$

ou bien

$$(2)\qquad z_k = (1+\alpha) z''_k - \alpha z'_k.$$

Pour démontrer que le système de coefficients angulaires $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ est une solution des $(n-1)$ premières équations (1), il suffit de le prouver pour l'une quelconque de ces $(n-1)$ équations, pour la première par exemple.

Or, nous avons par hypothèse les deux équations :

$$a_0 + a_1 z'_1 + a_2 z'_2 + \ldots + a_n z'_n = 0,$$
$$a_0 + a_1 z''_1 + a_2 z''_2 + \ldots + a_n z''_n = 0.$$

En multipliant la première par $(-\alpha)$ et la deuxième par $(1+\alpha)$ et en additionnant, on trouve, en vertu de la relation (2), que le système de valeurs z_1, z_2, z_3, ..., z_n est une solution de la première des n équations (1), et de même pour les $n-2$ autres.

A présent, montrons comment on pourrait déterminer graphiquement la position du pôle du faisceau $(O.1.2.3\ldots n)$ dont les coefficients angulaires forment la solution des n équations (1).

Pour cela, considérons les deux équations suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} s_0 + s_1 z'_1 + s_2 z'_2 + \ldots + s_{n-1} z'_{n-1} + s_n z'_{n_0} = 0, \\ s_0 + s_1 z''_1 + s_2 z''_2 + \ldots + s_{n-1} z''_{n-1} + s_n z''_{n_0} = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles z'_{n_0} et z''_{n_0} représentent les valeurs que prend l'inconnue z_n de la dernière équation du système (1) lorsqu'on y substitue aux autres inconnues z_1, z_2, z_3, ..., z_{n-1} chacun des deux systèmes de valeurs z'_1, z'_2, ..., z'_{n-1} et z''_1, z''_2, ..., z''_{n-1}.

Supposons que par un procédé quelconque on ait obtenu les deux valeurs z'_{n_0} et z''_{n_0}. On pourrait appliquer à cet effet la méthode donnée par M. d'Ocagne dans son cours de *Calcul graphique* précité, laquelle consiste à construire avec les deux systèmes de valeurs z'_1, z'_2, ..., z'_{n-1} et z''_1, z''_2, ..., z''_{n-1} deux polygones sur le *schéma* de la deuxième équation du système (1) et à prendre, pour valeurs de z'_{n_0} et z''_{n_0}, les coefficients angulaires des derniers côtés de ces deux polygones.

Tirons les deux rayons polaires $O'n_0$ et $O''n_0$ de coefficients angulaires z'_{n_0} et z''_{n_0}. Je dis que la droite nn_0 coupe la verticale O″O′ au pôle O relatif à la solution des n équations (1).

En effet, désignons par z_n le coefficient angulaire de cette droite et appliquons la relation (2) aux deux points n et n_0, nous avons :

$$(4) \qquad z_n = (1+\alpha)z''_n - \alpha z'_n = (1+\alpha)z''_{n_0} - \alpha z'_{n_0}.$$

En multipliant la première des deux équations (3) par $(-\alpha)$ et la deuxième par $(1+\alpha)$, on trouve, en vertu des relations (2) et (4), que les coefficients z_1, $z_2, \ldots, z_n$ des rayons polaires du faisceau $(O.1.2.3\ldots n)$ satisfait à la dernière des n équations (1). Or, comme, d'après la proposition (b), ces coefficients satisfont aussi aux $(n-1)$ premières de ces n équations, il en résulte qu'ils constituent la solution de ces n équations.

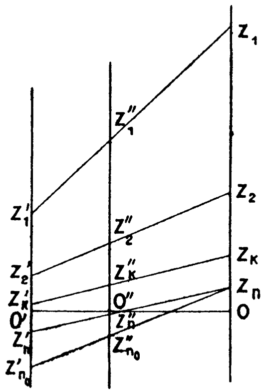
Deuxième solution. — Le principe de dualité, appliqué au moyen des coordonnées parallèles de M. d'Ocagne à la figure 1, donne la figure 2 qui fournit une autre solution du problème ci-dessus (a). Dans cette dernière figure, nous avons trois axes parallèles O, O′, O″. OZ_1, OZ_2, $OZ_3, \ldots, OZ_n$ sont des segments représentatifs des valeurs z_1, z_2, $z_3, \ldots, z_n$; de même avec les accents prime et seconde. Chacun des trois points Z_k, Z'_k, Z''_k correspondant à une même variable quelconque z_k est aligné.

L'axe O des segments représentatifs des valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_n$ satisfaisant aux n équations (1) est déterminé par le point de rencontre Z_n des deux alignements $Z'_n Z''_n$ et $Z'_{n_0} Z''_{n_0}$.

2. Procédé de résolution nomographique des équations linéaires. — Le principe du double ali-

gnement concourant de M. d'Ocagne permet, en vue de la résolution des équations linéaires, d'effectuer d'une manière simple l'élimination des inconnues.

Fig. 2.



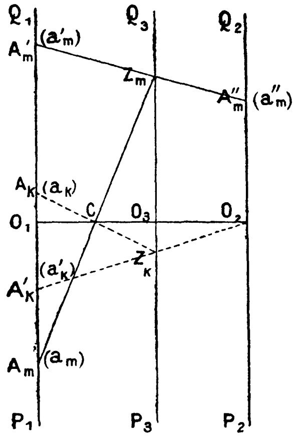
Soient

$$(e) \qquad a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n = 0,$$
$$(e') \qquad a'_0 + a'_1 z_1 + a'_2 z_2 + \ldots + a'_n z_n = 0$$

deux équations linéaires. Désignons par a''_0, a''_1, a''_2, ..., a''_n les coefficients de l'équation résultant de l'élimination d'une inconnue quelconque z_k entre ces deux équations. Ces coefficients s'obtiennent, par simple lecture, au moyen du nomogramme à double alignement (*fig.* 3) constitué par les éléments suivants : deux échelles régulières confondues P_1Q_1 relatives aux coefficients des équations (e) et (e'); une échelle régulière P_2Q_2 parallèle à P_1Q_1 et relative aux coefficients de l'équation résultante (e''); un axe des pivots P_3Q_3 parallèle à ces échelles et de position arbitraire; un point C de position variable sur la droite des origines O_1O_2 des échelles P_1Q_1 et P_2Q_2.

Pour avoir les coefficients de l'équation (e'') résultant de l'élimination d'une inconnue z_k entre deux équations quelconques (e) et (e'), on détermine d'abord la position du point C sur O_1O_2 de la façon suivante :

Fig. 3.



On mène l'alignement $O_2A'_k$, et, par le point de rencontre Z_k avec P_3Q_3, on tire l'alignement Z_kA_k qui coupe O_1O_2 au point C.

A présent, pour avoir le point A''_m coté a''_m sur P_2Q_2, on mène l'alignement A_mCZ_m, et, en le faisant pivoter autour de son point de rencontre Z_m avec P_3Q_3, on l'amène dans la position A'_mZ_m qui rencontre P_2Q_2 au point A''_m.

Démonstration. — En posant $O_1O_3 = \delta_1$, $O_2O_3 = \delta_2$ et $\frac{CO_3}{O_1C} = \gamma$, on a la condition suivante qui exprime que les deux alignements A_mC et $A'_mA''_m$ concourent sur l'axe P_3Q_3

$$a''_m = \gamma(\delta_1 + \delta_2)\,a_m - \delta_2 a'_m.$$

Cette relation est linéaire par rapport à a_m, a'_m et a''_m

et à un seul paramètre γ dont la valeur est donnée par les deux alignements concourants $O_2Z_kA'_k$ et A_kCZ_k correspondant à $a''_k = 0$.

Remarque. — Il convient dans la pratique de considérer deux axes des pivots : l'un, dans l'intervalle O_1O_2, et l'autre, en dehors de cet intervalle, de façon qu'avec l'un de ces deux axes le point C tombe toujours dans l'intervalle O_1O_2.