Amsler

Sur les propriétés d'addition d'une suite récurrente considérée par D. Bernoulli

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 297-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__297_0>

[H12d]

SUR LES PROPRIÉTÉS D'ADDITION D'UNE SUITE RÉCURRENTE CONSIDERÉE PAR D. BERNOULLI;

PAR M. AMSLER.

Étant donnée une équation

$$f(x) = x^m - p_1 x^{m-1} - p_2 x^{m-2} - \ldots - p_m = 0$$

dont les racines sont a, b, c, $\ldots$, l, on considère les coefficients des puissances décroissantes de x dans le développement de $\frac{1}{f(x)}$, que l'on appelle u_{m-1}, u_m, $\ldots$, u_n, $\ldots$.

On démontre aisément que l'on a

$$u_{n+1} = p_1 u_n + p_2 u_{n-1} + \ldots + p_m u_{n-m+1}$$

et, pour plus de commodité dans la théorie générale,

$$u_n = \sum \frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)}.$$

Nous allons étudier les propriétés d'addition de u relativement à n.

Forme symbolique de u_n. — Considérons les m équations suivantes linéaires par rapport aux quantités telles que $\frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)}$:

$$\sum \frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)} = u_n,$$

$$\sum a \frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)} = u_{n+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum a^{m-1} \frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)} = u_{n+m-1}.$$

On en conclut

$$\frac{a^n}{(a-b)\dots(a-l)} = \frac{\begin{vmatrix} u_n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ u_{n+1} & b & c & \dots & l \\ \dots & . & . & \dots & . \\ u_{n+m-1} & b^{m-1} & c^{m-1} & \dots & l^{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & . & \dots & l \\ . & . & . & \dots & . \\ a^{m-1} & b^{m-1} & . & \dots & l^{m-1} \end{vmatrix}}.$$

Les deux termes de la fraction sont divisibles par le produit des différences des racines $b, c, \dots, l$.

Imaginons que les indices des u soient placés en exposants symboliques; on a, en supprimant le facteur commun $\Pi(b-c)$:

$$\frac{a^n}{(a-b)\dots(a-l)} = \frac{u^{(n)}(u-b)(u-c)\dots(u-l)}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)}.$$

D'où la formule symbolique

$$a^n = u^{(n)}(u-b)(u-c)\dots(u-l).$$

Usage de la notation symbolique. — Cette notation est d'un maniement commode.

Calculons, par exemple, la fonction symétrique Σa^n en fonction des u; on a

$$\Sigma a^n = \Sigma u^{(n)}(u-b)\dots(u-l) = u^{(n)} \Sigma (u-b)\dots(u-l),$$

c'est-à-dire

$$\Sigma a^n = u^{(n)} f'(u),$$

$$\Sigma a^n = m u_{m+n-1} - (m-1) p_1 u_{m+n-2} - \dots.$$

Calculons encore la fonction $\sum \frac{a^n}{a-b}$.

Pour cela, nous groupons les deux termes $\frac{a^n}{a-b}$ et $\frac{b^n}{b-a}$ dont la somme est

$$\frac{a^n-b^n}{a-b} = \frac{u^{(n)}[(u-b)(u-c)\dots(u-l)-(u-a)(u-c)\dots(u-l)]}{a-b}$$

ou

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = u^{(n)}(u - c)(u - d)\ldots(u - l),$$

$$\sum \frac{a^n}{a - b} = u^{(n)}\,\Sigma\,(u - c)(u - d)\ldots(u - l).$$

Mais on a

$$f'(u) = \Sigma\,(u - b)(u - c)\ldots(u - l),$$

et, en dérivant,

$$f''(u) = 2\,\Sigma\,(u - c)(u - b)\ldots(u - l),$$

puisqu'un terme tel que $(u - c)(u - d)\ldots(u - l)$ peut s'obtenir de deux façons. On a donc

$$\sum \frac{a^n}{a - b} = \frac{1}{2}\,u^{(n)} f''(u).$$

On verrait, en dérivant une fois de plus, que l'on a

$$\sum \frac{a^n}{(a - b)(a - c)} = \frac{1}{2.3}\,u^{(n)} f'''(u),$$

et d'une façon générale

$$\sum \frac{a^n}{(a - b)\ldots(a - h)} = \frac{u^{(n)}}{p!} f^{(p)}(u),$$

p étant le nombre des racines a, b, ..., h.

Comme vérification, on a bien

$$\sum \frac{a^n}{(a - b)\ldots(a - l)} = \frac{u^{(n)}}{n!} f^{(n)}(u).$$

Addition des u. — Pour la commodité de l'écriture, soit v une lettre qui est la même que u et que l'on remplacera par u. une fois le calcul symbolique achevé.

Nous avons

$$a^n = u^{(n)}(u-b)\dots(u-l),$$
$$a^{n'} = v^{(n')}(v-b)\dots(v-l).$$

Il viendra

$$a^{n+n'} = u^{(n)}v^{(n')}[(u-b)(u-c)\dots(u-l)(v-b)(v-c)\dots(v-l)].$$

Notre but est l'évaluation de

$$u_{n+n'} = \sum \frac{a^{n+n'}}{(a-b)\dots(a-l)}.$$

Il vient donc

$$a^{n+n'} = u^{(n)}v^{(n')} \sum \frac{(u-b)(u-c)\dots(u-l)(v-b)(v-c)\dots(v-l)}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)}.$$

Je dis que le Σ est identique au polynome

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v}.$$

On voit, en effet, que ce polynome et le Σ sont des polynomes en u de degré $m-1$, qui prennent les mêmes valeurs pour $u=a, b, \dots, l$, puisque, pour $u=a$, par exemple, on a de part et d'autre

$$(v-b)(v-c)\dots(v-l).$$

On a donc, symboliquement,

$$u_{n+n'} = u^{(n)}v^{(n')}\frac{f(u)-f(v)}{u-v}.$$

Pour bien expliquer le retour de la notation symbolique aux indices, prenons pour $f(x)$ un polynome du deuxième degré : $f(x) = x^2 - px - q$

$$u_{n+n'} = u^{(n)}v^{(n')}\frac{[(u^2-pu-q)-(v^2-pv-q)]}{u-v}$$
$$= u^{(n)}v^{(n')}(u+v-p),$$
$$u_{n+n'} = u_{n+1}u_{n'} + u_{n'+1}u_n - pu_n u_{n'}.$$

Exemple. — Dans la suite de Fibonnacci, que l'on obtient pour $f(x) = x^2 - x - 1$ et dans laquelle chaque terme est la somme des deux précédents :

u_1	1
u_2	1
u_3	2
u_4	3
u_5	5
u_6	8
u_7	13
u_8	21
u_9	34
u_{10}	55
u_{11}	89
u_{12}	144
u_{13}	233
u_{14}	377

$$u_{9+5} = u_{14} = u_{10} u_5 + u_9 u_6 - u_9 u_5$$

$$377 = 5 \times 55 + 8 \times 34 - 5 \times 34.$$

Prenons encore : $f(x) = x^3 - px^2 - qx - r$

$$u_{n+n'} = u^{(n)} v^{(n')} [u^2 + uv + v^2 - p(u+v) - q].$$

Ici, on peut simplifier la formule d'addition au moyen de la loi de récurrence, $u^3 - pu^2 - qu - r$ devant être regardé comme nul,

$$u_{n+n'} = u^n v^{n'} uv + u^n v^{n'-1} (v^2 - pv^2 - qv)$$
$$+ u^{n-1} v^{n'} (u^3 - pu^2 - qu) + qu^n v^{n'},$$

$$u_{n+n'} = u^{n+1} v^{n'+1} + r(u^n v^{n'-1} + u^{n-1} v^{n'}) + qu^n v^{n'},$$

$$u_{n+n'} = u_{n+1} u_{n'+1} + r(u_n u_{n'-1} + u_{n'} u_{n-1}) + qu_n u_{n'}.$$

Exemple. — $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; on obtient comme suite les nombres triangulaires

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & \ldots, \\ u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & \ldots. \end{array}$$

$$u_{6+4} = u_{10} = u_7 u_5 + u_6 u_3 + u_4 u_5 - 3 u_4 u_6,$$

$$45 = 210 + 45 + 60 - 270.$$

Formules de multiplication. — Si, dans la formule qui donne $u_{n+n'}$, on fait $n' = n$, on aura une formule qui donne u_{2n}. De même, en faisant $n' = n - 1$, on calculera u_{2n-1}.

Exemple. — $f(x) = x^2 - px - q$.

$$\begin{aligned} u_{2n} &= 2u_n u_{n+1} - pu_n^2 = pu_n^2 + 2qu_n u_{n-1}, \\ u_{2n-1} &= u_n^2 + u_{n-1}u_{n+1} - pu_n u_{n-1} = u_n^2 + qu_{n-1}^2. \end{aligned}$$

On voit que ces formules donnent de proche en proche u_{2^k} et u_{2^k-1}, on effectue ainsi la duplication; il est évident qu'en choisissant n' égal à $2n$ et se servant de la duplication, on effectuerait la triplication, etc. Mais il est plus simple d'appliquer l'addition à plus de deux indices.

Addition à 3, 4, ... *indices.* — On verrait comme plus haut que l'on a

$$u_{n+n'+n''} = u^{(n)} v^{(n')} w^{(n'')} \sum \frac{f(v)f(w)}{(u-v)(u-w)}.$$

Calculons cette formule pour $f(x) = x^2 - px - q$

$$\sum \frac{f(v)f(w)}{(u-v)(u-w)} = \frac{\begin{vmatrix} f(v)\,f(w) & u & 1 \\ f(w)\,f(u) & v & 1 \\ f(u)\,f(v) & w & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u^2 & u & 1 \\ v^2 & v & 1 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} u\,f(u) & f(u) & 1 \\ v\,f(v) & f(v) & 1 \\ w\,f(w) & f(w) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u^2 & u & 1 \\ v^2 & v & 1 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}}.$$

En décomposant les colonnes des numérateurs en colonnes partielles, on a aisément

$$\sum = vw + wu + uv - p(u + v + w) + p^2 + q$$

et

$$u_{n+n'+n''} = u^{(n)} v^{(n')} w^{(n'')} \sum \frac{f(v)f(w)}{(u-v)(u-w)}.$$

On verrait de même que

$$u_{n+n'+n''+n'''} = -u^{(n)} v^{(n')} w^{(n'')} s^{(n''')} \sum \frac{f(v)f(w)f(s)}{(u-v)(u-w)(u-s)}, \qquad \ldots;$$

etc.

Applications. — Les propriétés précédentes s'appliquent dans le calcul des racines par la méthode de Bernoulli et dans l'étude de la décomposition des termes des suites numériques en facteurs.

Exemple. — Calcul de $\sqrt{2}$ par la suite de Pell,

$$x^2 = 2,$$

on a

$$y^2 - 2y - 1 = 0.$$

En posant

$$x = 1 + \frac{1}{y},$$

on sait que

$$\sqrt{2} - 1 = \lim \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l}
2+1 \\
\quad 4+2 \\
\qquad 10+5 \\
\qquad\quad 24+12 \\
\qquad\qquad 58+29 \\
\qquad\qquad\quad 140+70 \\
\qquad\qquad\qquad 338+169 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 816+408 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 1570+985 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 4756
\end{array}
&
\begin{array}{l}
1-2-1 \\
\hline
1+2+5+12+29+70+169 \\
\quad +408+985+2178+5741
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
u_9 &= 985, & u_{19} &= \overline{2378}^2 + \overline{985}^2, \\
u_{10} &= 2378, & u_{20} &= 2 \times \overline{2378}^2 + 2 \times 2378 \times 985, \\
u_{11} &= 5741, & u_{21} &= \overline{2378}^2 + \overline{5741}^2 \quad \text{ou} \quad 2u_{20} + u_{19}.
\end{aligned}$$

On a calculé ainsi u_{20} et u_{19} par duplication sans avoir besoin des u intermédiaires entre u_{11} et u_{19}.

On a, d'ailleurs,

$$\frac{u_{19}}{u_{20}} > \sqrt{2} - 1 > \frac{u_{20}}{u_{21}},$$

avec

$$\frac{u_{19}}{u_{20}} - \frac{u_{20}}{u_{21}} = \frac{1}{u_{19} \cdot u_{20}}.$$

Exemple. — On conclut des formules établies plus haut que, pour $f(x) = x^2 - px - q$ (p et q entiers), que u_r divise u_{nr} $\left(\text{autrement : } \frac{a^{nr} - b^{nr}}{a - b} \text{ est divisible par } \frac{a^r - b^r}{a - b}\right)$.

Exemple. — Si, dans $x^2 - px - q$, on a $q = -a^2$, tous les u_{2n+1} se décomposent comme suit :

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - a^2 u_n^2 = (u_{n+1} + a u_n)(u_{n+1} - a u_n).$$

Exemple. — Pour $f(x) = x^2 - px - q$, on a

$$u_{3m+1} = u_{m+1}^3 + 3q u_{m+1} u_m^2 - pq u_m^3;$$

s'il y a un nombre entier N tel que

$$N^3 + 3qN - pq = 0,$$

on connaît une décomposition de u_{3m+1} en facteurs.