Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 28-38

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__28_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Mouvement d'un corps solide mobile sans frottement autour d'une droite fixe.*

Cas où la fixité de la droite est obtenue par celle de deux points du corps. Calcul des pressions supportées par ces points. Axes permanents et axes naturels de rotation.

II. *Soient* Oxyz *un système d'axes rectangulaires dont*

---

dantes, fournies par le théorème des projections, qui relient ces cosinus. Chaque contour fermé, par exemple le quadrilatère ABCD de la figure 2, donne 3 équations. M. Larmor ne compte que 24 contours indépendants dans la figure, ce qui lui donne 72 équations. Il y a en réalité 28 contours indépendants, ce qui porte le nombre des équations à 84.

(1) Par exemple dans l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* t. IV_1, p. 277.

l'axe Oz *est vertical, et les deux droites*

$$D \begin{cases} y = 0, \\ z = a, \end{cases} \qquad D' \begin{cases} x = 0, \\ z = -a, \end{cases}$$

situées respectivement dans les plans xOz, yOz.

Une tige matérielle pesante, homogène, de longueur $2l$ *est assujettie à glisser sans frottement par ses extrémités sur les droites* D, D'. *De plus, chaque point matériel de la tige est attiré par le point* O *proportionnellement à sa masse et à sa distance au point* O.

1° *Trouver le mouvement de la tige;*

2° *Imaginant que la tige considérée appartienne à une figure plane dont le plan est assujetti à rester vertical, étudier au point de vue cinématique le mouvement de cette figure. Quel est le lieu décrit par un point quelconque de la figure?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On veut atteindre, avec un projectile pesant* 50^g, *dont la vitesse initiale est de* 10^m *par seconde, un point situé, horizontalement, à* 5^m *de distance, et placé à* 3^m *au-dessus du point de départ du mobile.*

On demande de calculer :

1° *L'angle de la vitesse initiale avec l'horizon;*

2° *La grandeur de la vitesse finale et l'angle qu'elle fait avec l'horizon;*

3° *La perte d'énergie du projectile;*

4° *La durée du mouvement.*

On ne considérera que la parabole de renversement *et l'on négligera la résistance de l'air.*

Accélération de la pesanteur, $g = 9,81 \left(\frac{m}{\sec^2}\right)$.

(Novembre 1906.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Établir les équations propres à déterminer l'accélération, à un instant donné, des divers points d'une figure plane qui se meut dans son plan. Centre des accélérations.*

Trouver ce centre A *dans le cas où une chaînette don-*

née, appartenant au plan mobile, roule sans glisser sur une droite fixe, le point de contact se déplaçant de manière que sa distance à l'axe de la chaînette soit proportionnelle au temps. Le point A *est fixe pendant tout le mouvement, sa vitesse relative au plan mobile garde une grandeur constante.*

II. *On considère deux tiges homogènes, égales, non pesantes,* OA, AB *articulées en* A; OA *peut tourner autour du point fixe* O, *et le point* B *glisse sur une droite fixe* OZ. *Chaque élément des deux tiges est attiré vers* OZ *par une force égale au produit de sa masse par sa distance à* OZ. *Soient* θ *l'angle* ZOA, ψ *l'angle du plan* OAB *avec un plan fixe mené par* OZ. *Le système ayant un mouvement initial connu, former et discuter les équations qui donnent* θ *et* ψ. *Conditions initiales telles :* 1° *que* θ *reste constant,* 2° *que* $\frac{d\theta}{dt}$ *s'annule pour* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *: cela arrivera-t-il au bout d'un temps fini?*

SOLUTION.

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \psi'_0 \sin^2\theta_0,$$

$$(1 + 3\sin^2\theta)\sin^2\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = (\sin^2\theta_0 + 3\sin^4\theta_0)\theta_0'^2 + (\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta)(\sin^2\theta - \psi_0'^2 \sin^2\theta_0).$$

(Novembre 1906.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un solide pesant* S *est limité extérieurement par une sphère de rayon* a. *La distribution des masses est telle que le centre de gravité* G *de* S *coïncide avec le centre de la sphère, et que l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point est de révolution; soit* Gz *l'axe de révolution.*

Le solide est posé à l'intérieur d'une sphère creuse Σ *de centre* O, *de rayon* R + a. *Cette sphère est fixe; la liaison est sans frottement.*

Déterminer le mouvement de S, *en employant successi-*

vement les théorèmes généraux et les équations de Lagrange.

On déterminera la position de S *par l'angle* θ *que fait* OG *avec la verticale descendante* Oz_1 *du point* O, *par l'angle* ψ *que fait le plan* GOz_1 *avec un plan vertical fixe, et par les angles d'Euler* ψ_1, θ_1, φ_1 *définissant l'orientation relative des deux trièdres trirectangles* $Gxyz$, $Ox_1y_1z_1$; *le premier lié au solide* S *en est un trièdre principal d'inertie, le second est fixe.*

On appellera M *la masse de* S, A *et* C *les moments d'inertie relatifs à* Gx *et* Gz.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un trièdre trirectangle fixe* $Oxyz$ *l'axe* Oy *est horizontal, et l'angle* zOx *admet comme bissectrice intérieure la verticale descendante.*

Le sommet O *du trièdre et un autre point* O' *situé sur* Oz *à la distance* 2R *du point* O *sont les deux extrémités du diamètre limite d'une demi-circonférence homogène pesante de masse* M. *Cette circonférence peut donc tourner autour de* Oz; *la liaison est sans frottement.*

1° *La circonférence étant supposée située dans le plan* zOx, *déterminer les coordonnées de son centre de gravité et l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point* O.

2° *On suppose que la circonférence placée dans le plan* zOy *soit abandonnée sans vitesse. Elle se met à osciller autour de* Oz. *Déterminer les réactions exercées par les points* O *et* O' *lorsque le plan de la circonférence vient coïncider avec le plan* zOx. (Novembre 1906.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — COURS : *Extension des équations de Lagrange :*

1° *Aux systèmes dont la position n'est pas définie à l'aide du nombre minimum de paramètres;*

2° *Aux systèmes non holonomes sans frottement;*

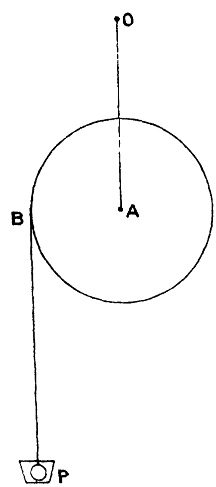
3° *Aux systèmes doués de frottement.*

PROBLÈME. — I. CINÉMATIQUE : *Déterminer le mouvement d'une figure plane dans son plan dans le cas où le centre* *des accélérations est fixe dans le plan fixe et où le centre instantané de rotation décrit une droite dans le plan fixe (roulante et loi d'orientation).*

II. Dynamique : *Un cylindre de révolution à axe vertical tourne d'un mouvement uniforme autour d'une de ses génératrices* G. *Un point matériel pesant est assujetti à rester sur la surface de ce cylindre, supposée parfaitement polie; il est de plus attiré par la droite* G *proportionnellement à la distance. Étudier le mouvement relatif du point sur le cylindre (conditions initiales quelconques; discussion).* (Novembre 1906.)

Marseille.

Epreuve théorique. — *Un disque circulaire homogène est suspendu par un axe* A, *placé à son centre, autour duquel*



il peut tourner, à un point fixe O, *au moyen de deux fils élastiques égaux qui s'allongent proportionnellement à leur tension. Sur la circonférence du disque est enroulé un fil flexible et inextensible qui porte à son extrémité un poids* P.

A l'origine, le système est en repos, les fils sont verticaux et les fils OA *sont à l'état naturel.*

On abandonne le système à lui-même et l'on demande de trouver son mouvement. On remarquera que les fils restent verticaux.

On néglige la masse des fils et celle de l'axe A. *Le poids du disque est égal au poids* P. *Un fil* OA *a* 3^m *de longueur et doublerait sous l'action d'une tension égale à* 10 *fois le poids* P. *On fera* $g = 10$.

Solution.

Soient z la distance de P à l'horizontale du point O, $OA = y$; θ l'angle dont tourne le disque, $\frac{1}{2}T$ la tension d'un fil OA, S celle de BP, on a

$$S = \frac{1}{4}T,$$

$$T = \frac{4}{3}mg(1 - \cos 5t),$$

$$y = \frac{17}{5} - \frac{2}{5}\cos 5t,$$

$$z = \frac{47}{15} + \frac{10}{3}t^2 - \frac{2}{15}\cos 5t,$$

$$R\theta = -\frac{4}{15} + \frac{10}{3}t^2 + \frac{4}{15}\cos 5t.$$

Épreuve pratique. — *Une plaque carrée plane et indéformable est suspendue aux quatre sommets d'un carré situé dans un plan horizontal, par quatre fils élastiques, identiques, verticaux et de même longueur dans leur état naturel.*

Un point pesant, qui a le même poids P *que la plaque, repose sur cette plaque et se trouve placé au quart de la droite qui joint le centre du carré à l'un des sommets. Ce quart est compté à partir du centre.*

Ce point pesant est en outre suspendu à un fil élastique, vertical, identique aux précédents, et attaché à un point fixe du même plan horizontal.

Primitivement la plaque est soutenue de manière que *les fils ne soient pas tendus, puis on la laisse s'abaisser lentement jusqu'à ce qu'il y ait équilibre.*

Les fils s'allongent proportionnellement à leur tension. Trouver la tension de chacun d'eux. On suppose qu'ils restent très sensiblement verticaux.

(Novembre 1906.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Exposer les théorèmes des vitesses virtuelles et de d'Alembert. Appliquer ces théorèmes à un système contenant des corps solides.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un losange articulé* OABC *formé de quatre tiges identiques homogènes pesantes peut glisser sans frottement dans un plan vertical. Le sommet* O *est fixe et le losange est primitivement en repos de manière que le sommet* C *soit sur la verticale du point* O, *et que l'angle* AOB *soit de* 60°. *La longueur des tiges est de* 1^m. *On demande la vitesse que possède le point* C *quand il arrivera au point* O.

La valeur de g est 9,8088; *l'unité de temps la seconde de temps moyen.* (Novembre 1906.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Chute d'un point matériel pesant d'une grande hauteur, en tenant compte de la rotation de la Terre.*

II. *Étude de la suspension à la Cardan.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux barres pesantes homogènes identiques* OA, OB *peuvent tourner autour d'une de leurs extrémités fixées au même point* O *dans un plan vertical. Elles sont réunies par un fil élastique* AB *dont on néglige le poids. Ce fil n'est pas tendu dans la position initiale; la longueur commune des barres et du fil est alors de* 1^m. *De plus, le fil* AB *est alors horizontal. La tension d'un fil élastique est proportionnelle à son allongement. On demande d'achever de la définir en s'appuyant sur ce que le système abandonné à lui-même arrive sans vitesse de* *façon que le fil* AB *soit sur l'horizontale qui passe par le point* O. *Le poids de chacune des tiges est de* 1^{kg}.

(Novembre 1906.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Deux points pesants* M *et* M', *de masses égales, sont reliés par un fil sans masse, flexible et inextensible. Le point* M *décrit sans frottement une verticale fixe, et le point* M' *est assujetti à se déplacer sans frottement dans un plan* P *qui contient cette verticale et tourne autour d'elle d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire* ω. *A l'origine du mouvement,* M *est immobile; la droite* MM' *fait un angle de* 45° *avec la verticale descendante issue de* M; *la vitesse relative de* M' *dans* P, *égale à* v_0, *est perpendiculaire à* M'M *et dirigée par rapport à cette droite du même côté que la verticale ascendante.*

Trouver le mouvement des deux points; montrer que le fil reste tendu pendant le cours du mouvement.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère le mouvement d'un plan* P *sur un plan fixe* Π.

1° *Démontrer qu'il y a, à chaque instant, un point du plan* P *dont l'accélération est nulle. On appelle ce point* centre des accélérations.

2° *On suppose que, lorsque* P *se déplace sur* M, *le centre des accélérations reste fixe dans* P, *tandis que le centre instantané décrit une droite fixe de* Π.

Trouver la trajectoire du centre des accélérations sur le plan Π *et celle du centre instantané sur* P.

(Novembre 1906.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un angle droit se meut de façon qu'un de ses côtés demeure tangent à un cercle, tandis que l'autre est tangent à une ellipse concentrique : trouver dans ce mouvement les deux courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.*

II. *Mouvement relatif d'un point matériel pesant à la surface de la Terre sous l'influence d'une résistance de milieu proportionnelle à la vitesse, en tenant compte de la rotation terrestre* ω.

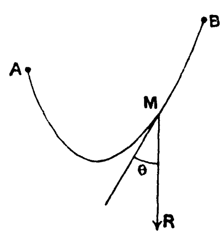
NOTE. — *On supposera que le mobile ne sort pas d'une région où l'on peut regarder son poids (résultante de l'attraction et de la force centrifuge) comme constant en grandeur et en direction, et l'on négligera les puissances de* ω *d'indice supérieur à* 2.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une chaîne homogène pesante de longueur* $2l$ *et de poids* P *est fixée par ses extrémités en deux points* A *et* B *d'un même plan horizontal dont la distance est* $2a$. *Le système étant en équilibre, on fixe au point le plus bas de la chaîne un poids* p *très petit par rapport à* P; *calculer en première approximation les modifications de la figure d'équilibre.*

(Novembre 1906.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Trouver la figure d'équilibre d'un fil flexible inextensible homogène, attaché à ses deux extrémités* A *et* B, *et dont tous les points sont soumis à des*



forces parallèles R *exprimées par la formule*

$$R = a \sin^m \theta,$$

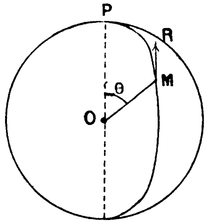
θ *étant l'angle aigu que fait la direction de la force avec la tangente à la courbe; a et m sont des constantes. Montrer que, si l'on désigne par* ρ *le rayon de courbure en un point, on a la relation*

$$R\rho \sin^2 \theta = \text{const.}$$

Calculer la tension en chaque point et examiner les cas *particuliers suivants :*

$$m = 0, \qquad m = 1, \qquad m = -1, \qquad m = -2, \qquad m = -3.$$

II. *Un point matériel* M *est assujetti à rester sur une sphère dont un point fixe* P *est considéré comme pôle, et il est sollicité par une seule force* R *dirigée à chaque instant suivant la tangente au méridien* MP *et du côté de* P ;



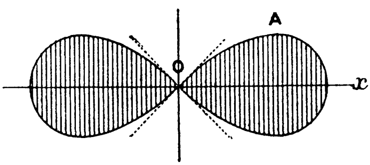
elle est inversement proportionnelle au carré du cosinus de la latitude et, par conséquent, exprimée par la formule

$$R = \frac{m\mu}{\sin^2\theta},$$

θ *représentant l'angle* MOP, m *la masse et* μ *un coefficient numérique. Déterminer le mouvement du point* M *en supposant que la vitesse initiale est tangente au parallèle passant par la position initiale du mobile.*

Calculer la pression exercée sur la surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque mince pesant* 10^{kg} *a la*



forme d'une lemniscate représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega,$$

où $a = 0^m,5$.

1° *Calculer le moment d'inertie de la plaque autour de l'axe polaire* Ox.

2° *En supposant que cette plaque soit animée, autour de cet axe* Ox, *d'une rotation uniforme de* 24 *tours par seconde, trouver la force de percussion appliquée au point* A *de la plaque le plus éloigné de l'axe, perpendiculairement à la plaque, capable de la ramener au repos.*

(Novembre 1906.)