# Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 7 (1907), p. 281-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__281_1>

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### 1888.

(1900, p. [illegible].)

*Lorsqu'une transversale* $\alpha\beta\gamma$, *à un triangle* ABC, *passe par le centre du cercle circonscrit à ce triangle, les trois cercles, ayant pour diamètres les diagonales du quadrilatère complet* $AC\alpha\gamma\beta B$, *se coupent en deux points qui sont situés, l'un sur le cercle circonscrit au triangle* ABC, *l'autre sur le cercle des neuf points relatifs au même triangle.* (C. Blanc.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

La solution élémentaire de cette proposition ne présente aucune difficulté. Voici une solution un peu plus générale.

On sait que, quelle que soit la transversale, les circonférences décrites sur $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ comme diamètres se coupent en deux points fixes $P$ et $P'$, les points de Monge du quadrilatère, et que les cercles orthotomiques de toutes les coniques inscrites dans ce quadrilatère forment un faisceau, dont les centres sont les points $P$ et $P'$.

Parmi les coniques du faisceau tangentiel se trouve une seule parabole dont le cercle de Monge se décompose suivant deux droites : la droite infinie et la directrice. Il en résulte que $PP'$ est la directrice de la parabole inscrite au quadrilatère.

Cette droite contient donc, d'après un théorème bien connu, les orthocentres des quatre triangles qui forment les quatre côtés pris trois à trois du quadrilatère. Donc :

Quelle que soit la transversale, les points $P$ et $P'$ sont toujours alignés avec $H$ l'orthocentre du triangle fixe $ABC$.

Considérons un quadrilatère donné et soit $P$ un des points de Monge.

La circonférence $PA\alpha$, décrite sur $A\alpha$ comme diamètre, passe par le pied $A'$ de la hauteur abaissée de $A$ sur le côté $BC$.

$PH$ coupe cette circonférence au second point $P'$.

On a

$$HP.HP' = HA.HA' = -4R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

THÉORÈME. — *Les points de Monge sont conjugués par rapport au cercle conjugué du triangle* $ABC$.

Si $P$ décrit une courbe quelconque, $P'$ décrit une courbe inverse.

Ainsi par exemple, si $P$ décrit la circonférence $ABC$, $P'$ décrit le cercle d'Euler.

Supposons une conique quelconque circonscrite au triangle $ABC$ et soit $P$ un point quelconque de cette conique. Les perpendiculaires élevées en $P$ sur les cordes $PA$, $PB$, $PC$ coupent les côtés $BC$, $CA$, $AB$ respectivement en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et la conique en $A'$, $B'$, $C'$.

On sait d'abord, propriété involutive bien connue, que $\alpha, \beta, \gamma$ sont en ligne droite. Mais il est facile de prouver que cette droite contient en outre le point de Frégier correspondant à P.

*Dans le cas du cercle circonscrit,* ce point devient le centre du cercle circonscrit. En effet, considérons l'hexagone inscrit PA'ACBB' qui fournit la pascale

$$\begin{vmatrix} PA' \\ BC \end{vmatrix} \equiv \alpha, \qquad \begin{vmatrix} AC \\ PB' \end{vmatrix} \equiv \beta, \qquad \begin{vmatrix} AA' \\ BB' \end{vmatrix} \equiv F$$

et l'hexagone inscrit PA'ABCC' avec la pascale

$$\begin{vmatrix} PA' \\ BC \end{vmatrix} = \alpha, \qquad \begin{vmatrix} AB \\ PC' \end{vmatrix} = \gamma, \qquad \begin{vmatrix} AA' \\ CC' \end{vmatrix} \equiv F.$$

Il en résulte que les quatre points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, F sont en ligne droite, d'où le théorème.

On démontrerait d'une manière plus générale le théorème suivant que j'ai proposé dans *Mathesis* (n° 1188, 1898, p. 239):

*On donne un triangle* ABC *et une transversale* $\alpha\beta\gamma$ *tournant autour d'un point fixe* D *et coupant* BC, CA, AB *en* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

*Le lieu des points de Monge* P *et* P' *est une quartique bicirculaire qui, lorsque le point* D *coïncide avec le centre du cercle circonscrit à* ABC, *se décompose suivant le cercle circonscrit et le cercle d'Euler du triangle.*

## 1891.

(1900, p. 574.)

*Dans un pentagone, les lignes menées par le milieu d'un côté et par le milieu de la droite qui joint les intersections des diagonales issues des extrémités de ce côté sont concourantes.*

### SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Soit ABCDE un pentagone quelconque; représentons par $\mu$, $\nu$, $\lambda$ les points d'intersection des paires de diagonales AD et BE, AC et BE, AC et BD. La droite qui joint le point milieu du côté AB au point milieu de la droite de jonction $\mu\lambda$ passe aussi par le point milieu de D$\nu$; c'est la newtonienne du quadrilatère D$\mu\nu\lambda$, lieu géométrique des centres des coniques du faisceau tangentiel touchant les quatre côtés de ce quadrilatère. Or, cette droite contient le centre de la conique particulière du faisceau touchant encore la cinquième diagonale EC du pentagone et par ce même point passeront les quatre autres newtoniennes relatives aux quatre autres côtés du pentagone.

## 2050.

(1906, p. 480.)

*Soient* E, D, $\Delta$ *les aires d'une ellipse, de sa première dé veloppée et de sa seconde développée.*

*On a entre ces trois aires la relation*

$$2E(\Delta - 4D) = 5D^2.$$

E.-N. Barisien.

SOLUTION
Par M. A. Guyau.

L'ellipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t,$$

d'aire

$$(1) \qquad E = \pi ab,$$

a pour développée la courbe bien connue

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \qquad y = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t,$$

d'aire

$$(2) \qquad D = \frac{3\pi(a^2 - b^2)^2}{8ab}.$$

Les coordonnées de la développée de cette dernière courbe s'expriment simplement en fonction de $t$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\left[\cos^3 t + \frac{3}{b^2}\sin^2 t\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)\right],$$

$$y = -\frac{a^2 - b^2}{b}\left[\sin^3 t + \frac{3}{a^2}\cos^2 t\sin t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)\right].$$

L'aire de cette courbe est

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{c} x\,dy - y\,dx = \frac{3(a^2-b^2)^2}{2ab}$$

$$\times\left\{\int_{2\pi}^{0} 2(a^2-b^2)\left(\frac{\sin^6 t\cos^2 t}{b^2} - \frac{\cos^6 t\sin^2 t}{a^2}\right)dt\right.$$

$$+\int_{2\pi}^{0}\frac{a^2}{b^2}(2\sin^6 t\cos^2 t - \sin^8 t)\,dt + \frac{b^2}{a^2}(2\sin^2 t\cos^6 t - \cos^8 t)\,dt$$

$$+\int_{2\pi}^{0}(4\cos^4 t\sin^4 t - \cos^2 t\sin^6 t - \sin^2 t\cos^6 t - \sin^2 t\cos^2 t)\,dt\ .$$

L'intégration s'effectue aisément si l'on tient compte de ce que

$$\int_{2\pi}^{0} e^{ix}\,dx = 0,$$

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{3\pi(a^2-b^2)^2}{ab}\,\frac{1}{2^8}\left[-20\,\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2} + 50\,\frac{a^4+b^4}{a^2b^2} + 28\right],\\ \mathcal{A} &= \frac{3\pi(a^2-b^2)^2}{ab}\left[\frac{15}{2^7}\,\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2} + \frac{1}{2}\right].\end{aligned}\right.$$

Il ne reste plus, pour obtenir la relation cherchée, qu'à éliminer $a$ et $b$, ou plutôt $(ab)$ et $(a^2-b^2)$, entre les relations (1), (2) et (3).

## 2059.

(1907, p. 94.)

*Soient* A, B, C *trois coniques homofocales. Par un point variable de* A *on mène une tangente à* B *et une tangente à* C. *Démontrer que ces deux tangentes font, avec la tangente à* A *au point considéré, des angles dont les sinus ont un rapport constant.* (BILLAT.)

### SOLUTION

Par M. PARROD.

Soient F et F′ les foyers, M un point de A, MB une tangente à B et MN la bissectrice de l'angle FMF′.

Désignons par $2c$ la distance focale, $2a$ le grand axe de A, $2a'$ celui de B, $\alpha$ l'angle FMN et $\beta$ l'angle BMN.

Il suffit de montrer que le rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ est constant. $\varphi'$ étant le symétrique de F′ par rapport à la tangente MB, $FM\varphi' = 2\beta$ et dans les triangles FMF′, $FM\varphi'$, on a

$$4c^2 = MF^2 + MF'^2 - 2MF.MF'\cos 2\alpha,$$
$$4a'^2 = MF^2 + MF'^2 - 2MF.MF'\cos 2\beta;$$

or,

$$MF + MF' = 2a,$$

donc

$$a^2 - c^2 = MF.MF'\cos^2\alpha,$$
$$a^2 - a'^2 = MF.MF'\cos^2\beta,$$
$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - a'^2}}.$$

Autre solution de M. LETIERCE.

NOTE

DE M. W.-F. EGAN.

Le théorème contenu dans la question 2059 peut être généralisé et étendu à l'espace à trois dimensions comme suit :

1° *Soient trois quadriques homofocales données* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. *Par une droite quelconque* L *de l'espace on fait passer six plans* $\alpha_1$, $\alpha_2$; $\beta_1$, $\beta_2$; $\gamma_1$, $\gamma_2$ *tangents à* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. *Le rapport*

$$R = \frac{\sin\widehat{\alpha_1\beta_1}\,\sin\widehat{\alpha_2\beta_1}}{\sin\widehat{\alpha_1\gamma_1}\,\sin\widehat{\alpha_2\gamma_1}}$$

*a la même valeur pour toutes les positions de* L.

2° *Si l'on prend quatre quadriques* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, *et si l'on désigne par* $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)$ *le rapport anharmonique*

$$\frac{\sin\widehat{\alpha_1\beta_1}\,\sin\widehat{\gamma_1\delta_1}}{\sin\widehat{\alpha_1\gamma_1}\,\sin\widehat{\beta_1\delta_1}},$$

*le produit* S *des deux rapports* $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)$ $(\alpha_2\beta_1\gamma_1\delta_2)$ *est constant pour toute position de la droite* L.

DÉMONSTRATION.

1° Soit

$$(1)\qquad pu^2 + qv^2 + rw^2 - t^2 - \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

l'équation tangentielle du système des quadriques.

Déplaçons le trièdre des axes de coordonnées d'une manière quelconque. L'équation (1) prend la forme

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &au^2 + bv^2 + cw^2 + 2fvw + 2gwu + 2huv \\ &\quad + t(lu + mv + nw + t) = \lambda(u^2 + v^2 + w^2). \end{aligned}\right.$$

Prenons, comme nouvel axe des $y$, la droite L, et prenons, comme plans des $xy$ et des $yz$, les plans tangents aux deux surfaces $\lambda_1$ et $\lambda_2$ que touche cette droite. Alors on a

$$c = \lambda_1,\qquad a = \lambda_2,\qquad g = 0.$$

Pour avoir les plans $\alpha_1$, $\alpha_2$, posons, dans l'équation (2),

$$\lambda = \alpha,\qquad u = \cos A,\qquad v = 0,\qquad w = -\sin A,\qquad t = 0;$$

ce qui donne

$$\lambda_2 \cos^2 A + \lambda_1 \sin^2 A = \alpha.$$

On a de même, pour $\beta_1$ et $\beta_2$,

$$\lambda_2 \cos^2 B + \lambda_1 \sin^2 B = \beta;$$

d'où, en soustrayant,

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(A - B) \sin(A + B) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \widehat{\alpha_1 \beta_1} \sin \widehat{\alpha_2 \beta_1}; \end{aligned}$$

de même

$$\alpha - \gamma = (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \widehat{\alpha_1 \gamma_1} \sin \widehat{\alpha_2 \gamma_1};$$

donc

$$R = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

2° On remarque que

$$\sin \widehat{\alpha_2 \beta_1} = \sin \widehat{\alpha_1 \beta_2}$$

et ainsi de suite, et l'on a facilement

$$S = \frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}.$$

C. Q. F. D.