NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JEAN SERVAIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1907. Composition d'algèbre et de trigonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 266-270

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__266_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1907. COMPOSITION D'ALGÈBRE ET DE TRIGONOMÉTRIE.

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

I. *Soient* $f(\theta)$ *et* $\varphi(\theta)$ *deux fonctions de la variable indépendante* θ, *et soient* $f'(\theta)$ *et* $\varphi'(\theta)$ *leurs dérivées. On pose*

$$x = f(\theta) - \varphi'(\theta), \qquad y = \varphi(\theta) + f'(\theta),$$
$$X = f' \sin\theta - \varphi'(\theta)\cos\theta,$$
$$Y = f' \cos\theta + \varphi'(\theta)\sin\theta.$$

Démontrer que l'on a identiquement

$$dx^2 + dy^3 = dX^2 + dY^2.$$

II. *Former l'équation du troisième degré qui admet pour racines les longueurs des côtés d'un triangle, connaissant le périmètre* $2p$, *la somme des trois hauteurs* $2h$ *et l'aire* S *du triangle.*

APPLICATION NUMÉRIQUE : *Calculer les trois côtés en supposant* $2p = 16^{\mathrm{m}}$, $2h = 13^{\mathrm{m}},60$, $S = 12^{\mathrm{m}^2}$.

III. *On donne quatre quantités a, b, c, d réelles et différentes entre elles. Soit*

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

1° *Déterminer une fonction $\varphi_1(x)$, polynome du troisième degré, telle qu'on ait*

$$\varphi_1(a) = b, \qquad \varphi_1(b) = c, \qquad \varphi_1(c) = d, \qquad \varphi_1(d) = a.$$

2° *Si l'on permute, dans $\varphi_1(x)$, a, b, c, d de toutes les manières possibles, on trouve six fonctions différentes : $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_6(x)$. Soient $F(x)$ la somme de ces six fonctions et*

$$G(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^3 F(x):$$

former la fonction $G(x)$ et étudier la variation de cette fonction.

3° *Déterminer les deux intégrales indéfinies*

$$\int G(x)\,dx, \qquad \int \frac{dx}{G(x)}.$$

I. La première question est un simple exercice de calcul, sans difficultés, car on a

$$\begin{aligned} dX &= dx\cos\theta + dy\sin\theta, \\ dY &= -dx\sin\theta + dy\cos\theta. \end{aligned}$$

II. Soit

$$f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$$

le polynome cherché. D'après l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} &\alpha = 2p, \\ &S\frac{\beta}{\gamma} = h, \\ &S^2 = p f(p) = p(p^3 - \alpha p^2 + \beta p - \gamma). \end{aligned}$$

On en tire les valeurs de β et γ :

$$\beta = \frac{(S^2 + p^4)\,h}{(hp - S)\,p},$$

$$\gamma = \frac{(S^2 + p^4)\,S}{(hp - S)\,p}.$$

Dans l'exemple numérique, les valeurs des coefficients sont

$$\alpha = 16, \qquad \beta = 85, \qquad \gamma = 150.$$

L'équation

$$x^3 - 16x^2 + 85x - 150 = 0$$

se résout en cherchant ses racines entières, et l'on trouve qu'elle admet pour racines 5, 5 et 6.

Le triangle est donc isoscèle : la base a 6^{m} et les deux côtés égaux chacun 5^{m}.

III. 1° La formule d'interpolation de Lagrange donne de suite

$$\varphi_1(x) = \sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}\,b,$$

les divers termes de Σ se déduisant de celui qui est écrit par permutation circulaire des lettres a, b, c, d.

2° A chaque permutation des lettres a, b, c, d correspond un polynome ; mais quatre permutations, se déduisant les unes des autres par permutations circulaires des lettres, fournissent le même polynome φ. Il y a donc seulement $\frac{24}{4} = 6$ polynomes distincts, pour lesquels

$$\varphi_1(a) = b, \qquad \varphi_2(a) = b, \qquad \varphi_3(a) = c, \qquad \varphi_4(a) = c,$$
$$\varphi\ (a) = d, \qquad \varphi_6(a) = d.$$

On a alors

$$F(x) = 2\sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}(b+c+d).$$

Posons

$$f(x) = x^4 - s_1 x^3 + s_2 x^2 - s_3 x + s_4;$$

on a, puisque $b+c+d = s_1 - a$,

$$F(x) = 2F_1(x) - 2F_2(x),$$

avec

$$F_1(x) = \sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} s_1,$$

$$F_2(x) = \sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} a.$$

On voit ainsi que $F_1(x)$ est le polynome, du troisième degré au plus, qui, pour les quatre valeurs a, b, c, d de x, prend la même valeur s_1; on a donc, identiquement,

$$F_1(x) = s_1.$$

De même, $F_2(x)$ est le polynome, du troisième degré au plus, qui, pour les valeurs a, b, c, d de x, prend respectivement les valeurs a, b, c, d; on a donc évidemment

$$F_2(x) = x.$$

On en conclut

$$F(x) = 2s_1 - 2x$$

et

$$G(x) = s_2 x^2 - s_3 x + s_4.$$

Ce polynome $G(x)$ est minimum pour

$$x = \frac{s_3}{2s_2}.$$

3° On a immédiatement

$$\int G(x)\,dx = \frac{1}{3}s_2x^3 - \frac{1}{2}s_3x^2 + s_4x + \text{const.}$$

La valeur de l'intégrale $\int \frac{dx}{G(x)}$ dépend de la réalité des racines de $G(x)$.

Si l'on a $s_3^2 - 4s_2s_4 > 0$, désignons par α et β les racines réelles de $G(x)$. On a alors

$$\int \frac{dx}{G(x)} = \frac{1}{s_2(\alpha-\beta)}\log\frac{x-\alpha}{x-\beta} + \text{const}$$

Si $s_3^2 - 4s_2s_4 < 0$, on a

$$\int \frac{dx}{G(x)} = \frac{2}{\sqrt{4s_2s_4 - s_3^2}}\,\text{arc tang}\frac{2s_2x - s_3}{\sqrt{4s_2s_4 - s_3^2}} + \text{const.}$$

Enfin, si $s_3^2 - 4s_2s_4 = 0$, on a

$$\int \frac{dx}{G(x)} = \frac{2}{s_3 - 2s_2x} + \text{const.}$$

Il est d'ailleurs facile de voir que ces trois cas sont possibles, car, quand les a, b, c, d sont égaux (ou presque égaux), les racines de $G(x)$ sont imaginaires, et, quand $s_2 = 0$, ces racines sont réelles.