Nouvelles annales de mathématiques

E. Mathy

Décomposition en éléments simples de la fonction doublement périodique de seconde espèce ayant un inifini d'ordre *n*. Formation des coefficients

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 263-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__263_1>

[F2d]

DECOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DE LA FONCTION DOUBLEMENT PÉRIODIQUE DE SECONDE ESPÈCE AYANT UN INFINI D'ORDRE n. FORMATION DES COEFFICIENTS;

PAR M. E. MATHY.

Pour résoudre la question, il faut établir le lemme suivant :

LEMME. — *Les coefficients du développement de* $\dfrac{\sigma(u-a)}{-\sigma a}$ *suivant les puissances de u sont des polynomes entiers en* ζ, p *et* $p^{(n)}$.

En effet, la fonction $\sigma(u-a)$ est holomorphe et impaire; donc

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma(u-a) &= -\sigma a + u\sigma' a - \frac{u^2}{1.2}\sigma'' a + \frac{u^3}{1.2.3}\sigma''' a - \ldots, \\ \sigma(u-a) &= -\sigma a\left(1 - u\frac{\sigma' a}{\sigma b} + \frac{u^2}{1.2}\frac{\sigma'' a}{\sigma a} - \frac{u^3}{1.2.3}\frac{\sigma''' a}{\sigma a} + \ldots\right). \end{aligned}\right.$$

Par définition

$$(2)\qquad \frac{\sigma' a}{\sigma a} = \zeta a.$$

En dérivant, on trouve

$$(2')\qquad \frac{\sigma'' a}{\sigma a} - \left(\frac{\sigma' a}{\sigma a}\right)^2 = -pa;$$

d'où

$$\frac{\sigma'' a}{\sigma a} = \overline{\zeta a}^2 - pa.$$

De même

$$\frac{\sigma''' a}{\sigma a} - \frac{\sigma'' a}{\sigma a}\frac{\sigma' a}{\sigma a} = -2\zeta a\, pa - p' a.$$

On en déduit

$$(3)\qquad \frac{\sigma''' a}{\sigma a} = \overline{\zeta a}^3 - 3\zeta a\, pa - p' a.$$

Mais on peut écrire

$$\frac{d}{da} : \frac{\sigma'' a}{\sigma a} = \frac{\sigma''' a}{\sigma a} - \frac{\sigma'' a}{\sigma a}\zeta a,$$

pour en conclure

$$(4)\qquad \frac{\sigma''' a}{\sigma a} = \frac{\sigma'' a}{\sigma a}\zeta a + \frac{d}{da}\frac{\sigma'' a}{\sigma a}.$$

D'une façon générale

$$(5)\qquad \frac{\sigma^{(n)} a}{\sigma a} = \frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a}\zeta a + \frac{d}{da} : \frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a}.$$

Cette égalité jointe à (2) démontre le lemme et donne la loi de formation des coefficients de (1); il suffit de faire (n) successivement égal à 2, 3, 4, ...

Le développement sera

$$(6)\qquad \frac{\sigma(u-a)}{-\sigma a} = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{u^n}{n!}\left[\frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a}\zeta a + \frac{d}{da} : \frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a}\right].$$

Problème. — *Soit la fonction* $F(u)$ *doublement périodique de seconde espèce ayant un infini d'ordre* n; *sa forme générale est*

$$(7)\qquad F(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{(-1)^n\sigma a_1\sigma a_2\ldots\sigma a_n(\sigma u)^n}e^{\rho u}.$$

La formule de décomposition est

$$(8)\quad F(u) = \varphi^{(n-1)}u + A_1\varphi^{(n-2)}u + A_2\varphi^{(n-3)}u + \ldots + A_{n-1}\varphi(u),$$

l'élément simple

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u-a_1-a_2\ldots a_n)}{-\sigma(a_1+a_2+\ldots+a_n)\sigma u}e^{\rho u}.$$

Les développements de $e^{\rho u}$ et de $(\sigma u)^{-n}$ sont connus; comme l'expression (6) fournit les développements des n fonctions $\sigma(u-a_n)$, on peut calculer d'une façon explicite les coefficients $A_{(n-1)}, \ldots, A_2, A_1$, de la formule (8); on sait qu'ils sont respectivement les coefficients des puissances négatives de u de n à 1 dans le produit des $(n+2)$ fonctions qui forment $F(u)$.

Application $(n = 3)$.

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} F(u) &= \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\sigma(u-a_3)}{-\sigma a_1\sigma a_2\sigma a_3(\sigma u)^3}e^{\rho u} \\ &= \varphi'' u + A_1\varphi' u + A_2\varphi u, \\ \varphi u &= \frac{\sigma(u-a_1-a_2-a_3)}{-\sigma(a_1+a_2+a_3)\sigma u}e^{\rho u}. \end{aligned}\right.$$

En formant les développements on trouve

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} F(u) = \varphi'' u &+ \left(\rho - \sum_1^3 \zeta a_n\right)\varphi' u \\ &+ \frac{1}{1.2}\left[\left(\rho - \sum_1^3 \zeta a_n\right)^2 - \sum_1^3 p a_n\right]\varphi u. \end{aligned}\right.$$

Si

$$\rho = \sum_{1}^{3} \zeta a_n,$$

on retrouve une forme classique

$$
(11) \quad \left\{
\begin{aligned}
F(u) &= \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\,\sigma(u-a_3)}{-\sigma a_1\,\sigma a_2\,\sigma a_3(\sigma u)^3}\, e^{(\zeta a_1+\zeta a_2+\zeta a_3)u} \\
&= \varphi'' u - \frac{1}{1.2}(p a_1 + p a_2 + p a_3)\,\varphi u, \\
\varphi u &= \frac{\sigma(u-a_1-a_2-a_3)}{-\sigma(a_1+a_2+a_3)\,\sigma u}\, e^{(\zeta a_1+\zeta a_2+\zeta a_3)u}.
\end{aligned}
\right.
$$