Nouvelles annales de mathématiques

E. Mathy

Potentiel d'une couronne circulaire électrique de largeur infiniment mince et de densité superficielle égale à l'unité

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 257-263

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__257_1>

[T5a]

POTENTIEL D'UNE COURONNE CIRCULAIRE ÉLECTRIQUE DE LARGEUR INFINIMENT MINCE ET DE DENSITE SUPERFICIELLE ÉGALE A L'UNITÉ;

Par M. E. MATHY.

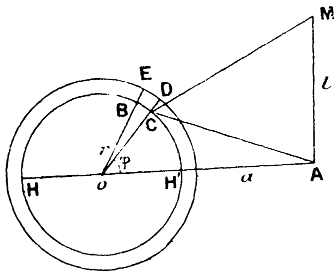
Soient la couronne circulaire de rayon $r = OC$ et de largeur dr, le point M situé en dehors du plan du cercle OC.

De M on abaisse MA perpendiculaire sur le plan de la couronne et l'on joint A au centre du cercle; les longueurs de ces deux droites fixes sont l et a. Dès lors, si l'on trace le secteur d'ouverture infiniment petite

$d\varphi =$ BOC, φ désignant l'angle COA, ce secteur découpera sur la couronne l'élément de surface

$$\text{BCDE} = r\,d\varphi\,dr;$$

la distance du point M au centre de gravité de cette



surface peut être prise égale à MC; comme la densité de la couche est 1, la masse comprise sous cet élément sera $r\,d\varphi\,dr$; donc, le potentiel élémentaire en M sera

$$\frac{r\,d\varphi\,dr}{\text{MC}}.$$

Le potentiel de la couronne sera donc

$$(1)\qquad V = 2\int_0^{\pi} \frac{r\,d\varphi\,dr}{\text{MC}} = 2\int_0^{\pi} \frac{r\,d\varphi\,dr}{\sqrt{l^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi}}.$$

Or, la couronne étant circulaire, r et dr sont constants :

$$V = 2r\,dr \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{l^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi}}.$$

Mais on peut écrire :

$$V = 4r\,dr \int_0^{\pi} \frac{-d(90^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2 - 4ar\sin^2(90^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}}$$

$$= \frac{4r\,dr}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}$$

lorsque

$$\psi = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi \qquad \text{et} \qquad k^2 = \frac{4ar}{l^2 + (a+r)^2}.$$

On reconnaît sous cette forme que

$$(2) \qquad V = \frac{4r\,dr\,K}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2}}.$$

De ce que k^2 est plus petit que 1, il est possible de calculer V à l'aide des Tables de Legendre: d'ailleurs $\sqrt{l^2 + (a+2)^2}$ n'est autre que la droite MH, H étant l'extrémité du diamètre passant par A.

Composante suivant MA *de l'attraction de cette couronne.*

On sait que l'attraction suivant MA ou l est donnée par

$$(3) \qquad -A = \frac{dV}{dl}.$$

En vertu de (2)

$$-A = \frac{d}{dl}\,\frac{4r\,dr\,K}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2}}.$$

En effectuant, on trouve

$$(4) \qquad -A = \frac{-4lr\,dr\,K}{[l^2 + (a+r)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{4r\,dr}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2}}\,\frac{dK}{dl}.$$

Pour obtenir $\frac{dK}{dl}$, il faut remarquer que K est fonction de son module k^2, lequel est à son tour fonction de l; on aura ainsi

$$\frac{dK}{dl} = \frac{dK}{d(k^2)} \frac{d(k^2)}{dl}. \tag{5}$$

Or $\frac{dK}{d(k^2)}$ est une formule classique

$$\frac{dK}{d(k^2)} = \frac{E}{2k^2(1-k^2)} - \frac{K}{2k^2}.$$

Appliquée au cas particulier de $k^2 = \frac{4ar}{l^2+(a+r)^2}$, elle donne

$$\frac{dK}{d(k^2)} = \frac{E[l^2+(a+r)^2]^2}{8ar[d^2+(a-r)^2]} - \frac{K[l^2+(a+r)^2]}{8ar}. \tag{6}$$

Comme

$$\frac{d(k^2)}{dl} = \frac{d}{dl} : \frac{4ar}{l^2+(a+r)^2} = \frac{-8arl}{[l^2+(a+r)^2]^2}, \tag{7}$$

on aura pour (5)

$$\frac{dK}{dl} = \frac{-lE}{[d^2+(a-r)^2]} + \frac{Kl}{[l^2+(a+r)^2]}. \tag{8}$$

Enfin, cette expression de $\frac{dK}{dl}$ reportée dans (4) fournira la valeur de $-$ A

$$\left\{\begin{aligned} -A = {} & \frac{-4lrdrK}{[l^2+(a+r)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{4rldrE}{\sqrt{l^2+(a+r)^2}\,[l^2+(a-r)^2]} \\ & + \frac{4lrdrK}{[l^2+(a+r)^2]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$A = \frac{4rdrlE}{\sqrt{l^2+(a+r)^2}\,[l^2+(a-r)^2]}. \tag{10}$$

Le module de E est k^2; sa valeur est donnée par les Tables de Legendre comme celle de K; en outre $[l^2+(a-r)^2]$ est le carré de la droite MH'.

Calcul direct de A.

Cette valeur de A sera exprimée par

$$(11)\qquad \begin{cases} A = 2\displaystyle\int_0^\pi \frac{r\,d\varphi\,dr}{\overline{MC}^2}\cos CMA \\ \quad = 2\displaystyle\int_0^\pi \frac{r\,d\varphi\,dr\,l}{(l^2+a^2+r^2-2ar\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Pour obtenir la valeur de cette intégrale, on se sert des signes de Weierstrass. D'abord A peut se mettre sous la forme

$$(12)\qquad A = \frac{2r\,dr\,l}{(l^2+a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left(1-\frac{2ar}{l^2+a^2+r^2}\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On pose

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{2ar}{l^2+a^2+r^2} = h, \\ \cos\varphi = u; \end{cases}$$

d'où

$$d\varphi = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}};$$

les limites 0 et π de φ correspondent pour u aux limites 1 et -1. Avec ces nouvelles quantités, on aura successivement

$$A = \frac{2r\,dr\,l}{(l^2+a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{(1-hu)\sqrt{(u^2-1)(hu-1)}},$$

$$(14)\qquad A = \frac{2r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}}\int_{+1}^{-1}\frac{du}{\left(u-\frac{1}{h}\right)\sqrt{(u^2-1)\left(u-\frac{1}{h}\right)}}.$$

Les racines du polynome sous le radical étant $\frac{1}{h}$, 1, — 1; afin d'annuler le coefficient du second terme, on pose

$$u = pv + \frac{1}{3h}. \tag{15}$$

Il en résulte que les racines sont

$$e_1 = \frac{2}{3h}, \qquad e_2 = 1 - \frac{1}{3h}, \qquad e_3 = -1 - \frac{1}{3h}; \tag{16}$$

et les limites de l'intégration deviennent e_2 et e_3.

Dès lors (14) prend la forme

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{2r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{2}{3}}} \int_{e_2}^{e_3} \frac{p'v\,dv}{(pv - e_1)\sqrt{(pv - e_1)(pv - e_2)(pv - e_3)}} \\ &= \frac{4r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}} \int_{e_3}^{e_2} \frac{dv}{pv - e_1}. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Or, de la formule

$$p(v + \omega_1) - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{pv - e_1},$$

on conclut

$$\mathrm{A} = \frac{4r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \int_{e_3}^{e_2} [p(v + \omega_1) - e_1]\,dv,$$

$$\mathrm{A} = \frac{-4r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \left[\zeta(u + \omega_1) + e_1 v\right]_{e_3}^{e_2},$$

$$\mathrm{A} = \frac{-4r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} [\eta + e_1\omega].$$

Enfin, de ce que

$$\eta + e_1\omega = \mathrm{E}\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$\mathrm{A} = \frac{-4r\,dr\,l\,\mathrm{E}}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)\sqrt{e_1 - e_3}}. \tag{18}$$

Des formules (16) on déduit

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{4ar}{l^2 + (a + r)^2},$$

$$e_1 - e_3 = \frac{l^2 + (a + r)^2}{2ar}, \qquad e_1 - e_2 = \frac{l^2 + (a - r)^2}{2ar};$$

d'où

$$\text{(19)} \qquad \mathrm{A} = \frac{-4r\,dr\,l\,\mathrm{E}}{\sqrt{l^2 + (a + r)^2}\,[l^2 + (a - r)^2]}.$$

Le signe — indiquant une répulsion, les expressions (19) et (10) concordent.