NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. PADÉ

Sur la réduction en fraction continue canonique de la fonction $e^x x^{-\alpha} \int_x^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 249-255

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__249_0>

[D2eβ]

SUR LA RÉDUCTION EN FRACTION CONTINUE CANONIQUE DE LA FONCTION $e^x x^{-\alpha} \int_x^\infty e^{-z} z^{\alpha-1}\, dz$;

PAR M. H. PADÉ.

1. Cette fonction est une de celles qu'a étudiées Laguerre dans son Mémoire *Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1885; *Œuvres*, t. II); c'est la seule pour laquelle il se soit préoccupé de la question de la convergence, en établissant que la fraction continue est convergente, alors que la série entière en $\frac{1}{x}$, à laquelle conduit le développement de la fonction, est divergente. On retrouvera ici tous les résultats de Laguerre, mais obtenus par une méthode infiniment plus directe et plus simple. J'ai indiqué cette méthode d'un seul mot dans mon Mémoire pour le grand Prix des Sciences mathématiques en 1904, où la question est traitée d'une façon plus large et au point de vue des variables complexes, et aussi dans une Note des *Comptes rendus*, du 11 décembre 1905. Je signalerai, comme se rapportant au même ordre de recherches, l'intéressant travail de M. Nielsen : *Sur le développement en fraction continue de la fonction* Q *de M. Prym* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, séance du 21 janvier 1906).

2. Nous prendrons pour point de départ l'inté-

grale

$$I = \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}}, \tag{1}$$

où n est un entier positif, x un nombre réel et positif, et où la variable d'intégration z est supposée réelle.

On a

$$\frac{(z-x)^n}{z^{n+1-\alpha}} = z^{\alpha-1} - \frac{n}{1}\,x z^{\alpha-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,x^2 z^{\alpha-3} - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots n}\,x^n z^{\alpha-n-1}.$$

Multiplions les deux membres par $e^{-z}\,dz$, puis intégrons entre les limites x et $+\infty$. Si l'on pose

$$J_p = \int_x^\infty e^{-z} z^{\alpha-p-1}\,dz, \tag{2}$$

on obtient

$$\left\{\begin{aligned} I = J_0 - \frac{n}{1}\,x J_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\,x^2 J_2 - \ldots \\ + (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots n}\,x^n J_n. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Toutes les intégrales $J_1, J_2, \ldots, J_n$ se ramènent à J_0. On a, en effet,

$$z^{\alpha-p-1} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-p)}\,\frac{d^p(z^{\alpha-1})}{dz^p},$$

et, par suite,

$$J_p = \frac{1}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-p)} \int_x^\infty e^{-z}\,\frac{d^p(z^{\alpha-1})}{dz^p}\,dz.$$

Mais, des intégrations par parties faites successivement donnent

$$\int_x^\infty e^{-z}\,\frac{d^p(z^{\alpha-1})}{dz^p}\,dz = [\Theta_p]_x^\infty + (-1)^p \int_x^\infty z^{\alpha-1}\,\frac{d^p(e^{-z})}{dz^p}\,dz,$$
$$= [\Theta]_x^\infty + J_0,$$

où

$$\Theta_p = e^{-z}\frac{d^{p-1}(z^{\alpha-1})}{dz^{p-1}} + e^{-z}\frac{d^{p-2}(z^{\alpha-1})}{dz^{p-2}} + \ldots + e^{-z}z^{\alpha-1}.$$

Prise entre les limites x et $+\infty$, cette expression devient

$$[\Theta_p]_x^\infty = -e^{-x}[x^{\alpha-1} + (\alpha-1)x^{\alpha-2} + \ldots + (\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)x^{\alpha-p}];$$

et l'on en conclut

$$J_p = \frac{-1}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-p)}\left\{e^{-x}[x^{\alpha-1} + (\alpha-1)x^{\alpha-2} + \ldots + (\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)x^{\alpha-p}] - J_0\right\}.$$

Le terme en J_p dans (3) est, par suite, la somme de deux autres, savoir :

$$\frac{(-1)^{p+1}}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-p)}\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} \times e^{-x}x^\alpha[x^{p-1} + (\alpha-1)x^{p-2} + \ldots + (\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)],$$

produit de $e^{-x}x^\alpha$ par un polynome de degré $p-1$, et

$$\frac{(-1)^p}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-p)}\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}x^p J_0.$$

Si nous faisons maintenant p successivement égal à 1, 2, ..., n, et que nous ajoutions tous les résultats, puis J_0, nous obtiendrons I sous la forme d'une somme de deux termes dont le premier est le produit de $e^{-x}x^\alpha$ par un polynome de degré $n-1$, et le second le produit de J_0 par le polynome de degré n

$$\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} \times \left[x^n + (n-\alpha)\frac{n}{1}x^{n-1} + (n-\alpha)(n-\alpha-1)\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \ldots + (n-\alpha)(n-\alpha-1)\ldots(1-\alpha)\right].$$

Soit f_n la quantité entre crochets ; on a

$$(4)\quad \mathrm{I} = -e^{-x}x^{\alpha}\frac{\varphi_n}{(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)} + \frac{f_n}{(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}\mathrm{J}_0,$$

φ_n désignant un polynome de degré $n-1$; et l'on en conclut

$$(5)\qquad \mathrm{J}_0 = e^{-x}x^{\alpha}\frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{f_n}\mathrm{I},$$

ou, plus explicitement,

$$(5)'\quad \begin{cases} \displaystyle\int_x^{\infty} e^{-z}z^{\alpha-1}\,dz \\ \displaystyle\quad = e^{-x}x^{\alpha}\frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{(1-\alpha).(n-\alpha)}{f_n}\int_x^{\infty}\frac{e^{-z}(z-x)^n}{z^{n+1-\alpha}}\,dz, \end{cases}$$

ce qui est la formule du n° 18 du Mémoire de Laguerre.

3. En posant $z = x + t$ dans I, on obtient

$$\mathrm{I} = e^{-x}x^{\alpha}\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^n\,dt}{\left(1+\dfrac{t}{x}\right)^{n+1-\alpha}}.$$

Pour x infini, l'intégrale est égale à $\Gamma(n+1) = n!$ On déduit donc de (5)′

$$e^x x^{-\alpha}\int_x^{\infty} e^{-z}z^{\alpha-1}\,dz$$
$$= \frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{x^{n+1}f_n}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^n\,dt}{\left(1+\dfrac{t}{x}\right)^{n+1-\alpha}},$$

ce qui montre, puisque le développement suivant les puissances décroissantes de x du second membre commence par le terme

$$(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)\frac{n!}{x^{2n+1}},$$

que $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une des réduites de l'une des fractions continues canoniques de la fonction $e^x x^{-\alpha} \int_x^\infty e^{-z} z^{\alpha-1}\, dz$.

4. Le coefficient de I, dans la formule (5), est l'inverse du polynome

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &1+\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{n}{1}\,x+\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\,\frac{n(n-1)}{1.2}\,x^2+\ldots\\ &+\frac{1}{(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}\,\frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots n}\,x^n,\end{aligned}\right.$$

qui grandit indéfiniment, soit par valeurs négatives, soit par valeurs positives, lorsque, x étant supposé positif, n grandit indéfiniment; ce coefficient tend donc vers zéro, et l'on en conclut, pour $x > 0$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi_n}{f_n} = e^x x^{-\alpha} \int_x^\infty e^{-z} z^{\alpha-1}\, dz,$$

ce qui prouve la convergence de la fraction continue canonique considérée.

5. Si l'on cherche à mettre le second membre sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, on obtient une série divergente.

En le désignant par y et faisant le changement de variable $z = x + t$, on obtient

$$y = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} dt,$$

d'où l'on conclut que le premier terme de ce développement est $\frac{1}{x}$.

D'un autre côté, y satisfait à l'équation

$$x \frac{dy}{dx} = (x - \alpha) y - 1,$$

et, en posant

$$y = \frac{1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \ldots,$$

on en conclut la relation

$$-pa_p = a_{p+1} - \alpha a_p,$$

ou

$$a_{p+1} = (\alpha - p)a_p,$$

et, par suite,

$$a_n = (\alpha - 1)(\alpha - 2)\ldots(\alpha - n - 1).$$

On a donc

$$(7) \qquad y = \frac{1}{x} + \frac{\alpha - 1}{x^2} + \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{x^3} + \ldots,$$

série divergente quel que soit x.

6. On peut remarquer que

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} y = {} & \frac{1}{x} + \frac{\alpha - 1}{x^2} + \ldots + \frac{(\alpha - 1)\ldots(\alpha - p + 1)}{x^p} \\ & + \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)\ldots(\alpha - p)}{x^p} \\ & \times \left[\frac{1}{x} + \frac{\alpha - p - 1}{x^2} + \frac{(\alpha - p - 1)(\alpha - p - 2)}{x^3} + \ldots\right]; \end{aligned} \right.$$

et la série entre crochets a la même forme que celle qui définit y et n'en diffère que par le changement de α en $\alpha - p$. On en conclut la convergence de toute une autre catégorie de fractions continues canoniques associées à la fonction y.

7. Le polynome (6), que nous désignerons par P_n, se réduit aisément à une fonction hypergéométrique ; on voit immédiatement que

$$P_n = \lim_{u=\infty} F\left(-n, u, -\alpha + 1, -\frac{x}{u}\right).$$

La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ satisfaisant à la relation

$$\begin{aligned} 0 = {} & [\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)x]F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ & + \alpha(1 - x)F(\alpha + 1, \beta, \gamma, x) - (\gamma - \alpha)F(\alpha - 1, \beta, \gamma, x), \end{aligned}$$

on en conclut pour P_n la relation

$$0 = (2n - \alpha + 1 + x)P_n - nP_{n-1} - (n - \alpha + 1)P_{n+1};$$

et, comme

$$P_n = \frac{f_n}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)},$$

il s'ensuit que

$$f_{n+1} = (2n - \alpha + 1 + x)f_n - n(n - \alpha)f_{n-1}.$$

Cette relation de récurrence entre dénominateurs de trois réduites consécutives de la fraction continue donne le moyen d'écrire immédiatement cette fraction continue.

8. En opérant de même sur l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, on obtient la formule

$$xf''_n + (x - \alpha + 1)f'_n - nf_n = 0.$$