NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. FOUCHÉ

Démonstration géométrique du théorème de Dupin relatif aux systèmes de trois surfaces qui se coupent orthogonalement

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 241-248

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__241_0>

[O6p]

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE DUPIN RELATIF AUX SYSTÈMES DE TROIS SURFACES QUI SE COUPENT ORTHOGONALEMENT;

PAR M. M. FOUCHÉ,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Ce théorème fameux n'est pas toujours énoncé avec toute la précision désirable.

Voici la proposition que nous allons démontrer par une méthode presque entièrement géométrique qui ne suppose connues que les propriétés élémentaires des normalies :

Si trois surfaces passant par un même point se coupent mutuellement à angle droit le long de trois arcs finis à partir de leur point commun, et si ce point n'est un point singulier sur aucune des trois surfaces ni sur aucune des trois intersections, ces trois intersections sont respectivement tangentes en leur point commun aux lignes de courbure de chacune des surfaces qui passent par ce point-là.

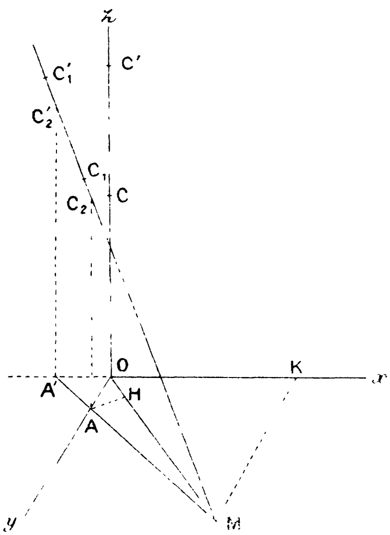
Pour plus de clarté, je partagerai la démonstration en plusieurs parties.

1° *Projection, sur un plan tangent à une surface, de la normale à cette surface en un point infiniment voisin du point de contact du plan tangent considéré.* — Soient (*fig.* 1) :

Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires dirigés, les deux premiers dans le plan tangent au point O tangentiellement aux deux lignes de courbure de la surface, et le troisième Oz suivant la normale à cette surface;

C le centre de courbure de la section normale à la surface tangente à Ox, C' celui de la section normale tangente à Oy;

Fig. 1.



$MC_1C'_1$ la normale au point M, infiniment voisin de O, lequel, aux infiniment petits près du second ordre, peut être supposé dans le plan xOy;

C_1 le centre de courbure principal correspondant au point M qui se trouve sur la même nappe de la développée de la surface que le point C, et C'_1 celui qui se trouve sur la même nappe que C_1.

A cause de la continuité de la surface, les distances CC_1 et $C'C'_1$ sont des infiniment petits du premier ordre. On sait que toutes les normales sont tangentes aux deux nappes de la développée. On sait aussi que la nappe qui passe en C est tangente au plan yOz, et celle qui passe en C', au plan xOz. Soient encore C_2 le point où la normale en M rencontre le plan yOz, et C'_2 celui où elle rencontre le plan xOz. Puisque la normale MC_1 est tangente en C_1 à une surface tangente au plan yOz en un point C infiniment voisin de C_1, le point C_2 où elle rencontre ce plan tangent sera aussi infiniment voisin de C et de C_1 (1). De même, le point C'_2 sera infiniment voisin de C' et de C'_1. Il en résulte que les distances MC_2 et MC'_2 ne diffèrent que par des infiniment petits des rayons de courbure principaux en M, et aussi des rayons de courbure principaux en O, puisque O et M sont infiniment voisins. Si l'on désigne ces rayons de courbure par ρ et ρ', on pourra donc poser

$$MC_2 = \rho, \qquad MC'_2 = \rho'.$$

Projetons maintenant la normale MC_2 sur le plan xOy. C_2 se projettera en A sur Oy et C'_2 en A' sur Ox, et l'on aura

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{MC_2}{MC'_2} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Ainsi : *La projection de la normale en* M *sur le*

---

(1) Soient O un point d'une surface, M un point infiniment voisin, la distance MO étant du premier ordre, m la projection de M sur le plan tangent en O, MS une tangente à la surface au point M qui rencontre en S le plan tangent en O. Mm est un infiniment petit du second ordre, mO du premier. Si l'angle MSm est fini, Sm est aussi du second ordre et SO du premier. Si l'angle MSm est un infiniment petit du premier ordre, la distance Sm est du premier ordre et SO est encore du premier ordre. Si l'angle MSm était d'un ordre supérieur au premier, alors Sm et SO seraient finis; mais alors tous les points de la tangente MS seraient à une distance du plan tangent infiniment petite du second ordre. Ce cas ne saurait se présenter dans notre problème puisque la distance du point M au plan yOz est du premier ordre; l'angle de MC_1 avec le plan yOz est bien du premier ordre, et C_2C_1 est bien un nfiniment petit du premier ordre.

plan tangent en O *infiniment voisin de* M *est coupée par les tangentes aux lignes de courbure passant en* O *en deux points qui déterminent sur cette projection, à partir du point* M, *des segments inversement proportionnels aux rayons de courbure principaux correspondant à ces lignes de courbure* (¹).

Ce théorème permet de construire la projection de la normale en M dès qu'on connaît les directions des lignes de courbure et les rayons principaux en O.

2° *Expression de la torsion géodésique d'une ligne tracée sur une surface.* — La torsion géodésique d'une ligne tracée sur une surface est le quotient, par un arc de cette courbe infiniment petit OM, de l'angle que fait la normale en M à la surface avec le plan normal à la surface en O et tangent en O à la ligne considérée. Il est visible que les lignes de courbure sont caractérisées par une torsion géodésique nulle, puisque la condition nécessaire et suffisante pour que deux normales infiniment voisines se rencontrent est précisément que l'angle qui sert à définir la torsion géodésique soit nul, ou, si l'on aime mieux, du second ordre d'infiniment petit. Au reste, cette condition ressortira avec évidence de l'expression que nous allons trouver.

Il faudrait aussi démontrer la réciprocité de la définition, c'est-à-dire qu'il faudrait montrer que l'angle de la normale en M avec le plan normal en O et tangent en O à OM est le même que l'angle de la normale

(¹) M. Lecornu m'a fait observer que cette propriété résultait immédiatement des propriétés de la normale à une conique, et de ce fait que la projection MAA′ de la normale sur le plan tangent en O est normale à l'indicatrice de la surface. La démonstration précédente ne suppose connue aucune propriété des coniques.

en O avec le plan normal en M et tangent à MO. Cette réciprocité ressortira aussi de l'expression de la torsion géodésique.

Menons de C_2 sur le plan ZOM la perpendiculaire C_2D qui se projette suivant AH perpendiculaire à OM. L'angle de la normale MC_2 avec le plan normal zOM a pour sinus $\frac{DC_2}{MC_2}$. Comme il est infiniment petit, on peut le confondre avec son sinus et la torsion géodésique τ a pour expression

$$\tau = \frac{1}{OM}\frac{C_2D}{MC_2} = \frac{AH}{OM \times MC_2}.$$

$MC_2 = \rho$. Il faut évaluer AH.

Soit φ l'angle de OM avec Ox. Menons MK parallèle à Oy. Nous aurons successivement

$$AH = OA\cos\varphi,$$
$$MK = OM\sin\varphi,$$
$$\frac{OA}{MK} = \frac{AA'}{MA'} = \frac{C_2C'_2}{MC'_2} = \frac{\rho-\rho'}{\rho'},$$

d'ou

$$OA = \frac{\rho-\rho'}{\rho'}OM\sin\varphi,$$
$$AH = OM\frac{\rho-\rho'}{\rho'}\sin\varphi\cos\varphi$$

et

$$\tau = \frac{\rho-\rho'}{\rho\rho'}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Il convient de donner un signe à τ suivant que la normale en M est d'un côté ou de l'autre de la section normale en O suivant OM. Sans insister sur les conventions qu'on peut faire à cet égard, on peut admettre que, dans le cas de la figure, τ serait négatif et adopter la formule définitive

$$\tau = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\sin 2\varphi.$$

Le fait que cette formule ne contient pas les variations de ρ, ρ', φ démontre la réciprocité dont je parlais tout à l'heure, et l'on voit également que τ s'annule seulement pour $\sin\varphi = 0$ et pour $\cos\varphi = 0$, c'est-à-dire pour les deux lignes de courbure, ou plus exactement pour des lignes tangentes aux lignes de courbure, tant qu'on ne considère que le seul point o.

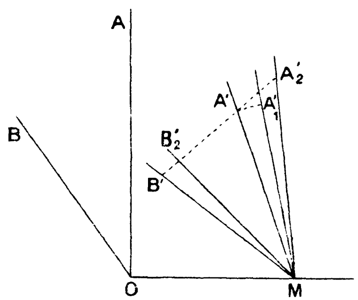
3° Théorème. — *Si deux courbes tracées sur une surface se coupent à angle droit, leurs torsions géodésiques au point d'intersection ont la même valeur absolue et des signes contraires.*

Cela résulte évidemment de la formule précédente, car, si l'on ajoute $\frac{\pi}{2}$ à φ, l'angle 2φ augmente de π et son sinus change de signe sans changer de valeur absolue.

4° Théorème. — *Si deux surfaces se coupent sous un angle constant le long d'une certaine ligne, cette ligne d'intersection a la même torsion géodésique soit qu'on la considère comme tracée sur l'une ou l'autre des deux surfaces.*

La démonstration repose sur ce fait bien connu que, si l'on projette un angle α sur un plan infiniment peu différent du plan de cet angle, la différence entre l'angle α et sa projection est un infiniment petit du second ordre. On peut aussi énoncer cette proposition en disant que la section d'un dièdre par un plan faisant un angle infiniment petit avec le plan perpendiculaire à l'arête du dièdre ne diffère de ce dièdre que d'un infiniment petit du second ordre. Soient (*fig.* 2) OA et OB les normales aux deux surfaces en O; MA′ et MB′ les normales en M, le point M étant supposé sur la tangente en O à la courbe d'intersection des deux surfaces, à une distance infiniment petite de O. Pour faire voir que les deux torsions géodésiques sont égales, il n'y a pas lieu de tenir compte de l'arc OM qui est le même sur les deux surfaces, et il suffit de montrer que les

Fig. 2.



angles qui servent à définir ces deux torsions sont égaux. Projetons donc la normale MA' sur le plan AOM et soit MA'_1 sa projection.

L'angle dont il s'agit est $A'MA'_1$. Or, le plan de cet angle, perpendiculaire au plan AOM, fait un angle infiniment petit avec le plan $A'MB'$, puisque celui-là, infiniment voisin de AOB, fait avec le plan AOM un angle infiniment peu différent d'un angle droit.

Si MA'_2 est la trace du plan $A'MB'$ sur le plan AOM, l'angle $A'MA'_1$ sera la projection de l'angle $A'MA'_2$, et, par suite, ces deux angles ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre et peuvent être remplacés l'un par l'autre. On pourra donc prendre pour angle de torsion relatif à la première surface l'angle $A'MA'_2$. De même, l'angle de torsion relatif à la seconde surface sera l'angle $B'MB'_2$ que fait la normale MB' avec la trace du plan $A'MB'$ sur le plan BOM.

D'après le principe déjà invoqué, l'angle $B'_2MA'_2$ ne diffère de l'angle AOB que d'un infiniment petit du second ordre. Par hypothèse, $A'MB' = AOB$. Donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$A'MB' = A'_2 M B'_2,$$

ce qui exige que les angles $A'MA'_2$ et $B'MB'_2$ soient égaux, et c'est ce qu'il fallait démontrer.

On remarquera que, si l'une des torsions est nulle, l'autre le sera aussi, de sorte que le théorème actuel comprend comme cas particulier la proposition bien connue d'après laquelle, si deux surfaces se coupent sous un angle constant et si l'intersection est une ligne de courbure sur l'une des deux surfaces, elle est aussi une ligne de courbure sur l'autre surface.

5° Théorème de Dupin. — Soient OA, OB, OC les intersections mutuelles des trois surfaces, et τ, τ_1, τ_2 leurs torsions géodésiques, qui, d'après le théorème précédent, sont indépendantes de la surface sur laquelle on les considère, puisque par hypothèse l'angle de deux surfaces reste droit. Mais, par hypothèse aussi, chacune des lignes OA, OB, OC est perpendiculaire aux deux autres. Donc, d'après ce que nous avons vu au n° 3, on aura

$$\tau + \tau_1 = 0, \qquad \tau_1 + \tau_2 = 0, \qquad \tau_2 + \tau = 0,$$

ce qui exige

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 = 0,$$

et les trois lignes OA, OB, OC sont tangentes aux lignes de courbure. C. Q. F. D.