R. BRICARD

Sur un système articulé

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 23-28

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__23_0>

[R1e]

SUR UN SYSTÈME ARTICULÉ;

PAR M. R. BRICARD.

1. On sait que si l'on réalise par des tiges rigides, articulées en leurs points de rencontre, un nombre quelconque de génératrices d'un hyperboloïde, on obtient une figure déformable.

Bien que ce résultat soit très connu, il ne se trouve généralement pas exposé dans les Ouvrages classiques. Aussi ne crois-je pas inutile d'en donner ici une démonstration, qui me paraît d'ailleurs particulièrement simple.

Je dirai, dans ce qui suit, que deux points variables sont *liés* quand leur distance reste constante. En employant cette expression, on peut énoncer le théorème suivant :

Soit ABCD *un quadrilatère gauche articulé. Supposons qu'on le déforme de telle manière que les carrés des longueurs de ses diagonales satisfassent à une relation linéaire*

$$\alpha\overline{AC}^2 + \beta\overline{BD}^2 = K, \tag{1}$$

α, β *et* K *étant des constantes. Dans ces conditions, tout point de* AB *est lié à un certain point de* CD; *tout point de* BC *est lié à un certain point de* HD. *Les droites joignant deux à deux les divers points liés sont les génératrices d'un hyperboloïde, déformable dans les conditions rappelées au début de cette Note.*

Soient, en effet, M un point de AB, N un point de CD. Leur liaison s'exprime par la relation

$$MN = \text{const.}$$

Mais on a, en vertu d'un théorème connu de Géométrie élémentaire (théorème de Stewart),

$$CD.\overline{MN}^2 + DN.\overline{MC}^2 + NC.\overline{MD}^2 = \text{const.},$$

le second membre ne dépendant que des longueurs CD, CN. On doit donc avoir

$$DN.\overline{MC}^2 + NC.\overline{MD}^2 = k_1,$$

k_1 étant une constante. On a, en vertu du même théorème,

$$AB.\overline{MC}^2 + BM.\overline{AC}^2 = k_2,$$

$$AB.\overline{MD}^2 + MA.\overline{BD}^2 = k_3,$$

k_2 et k_3 étant encore des quantités qui ne dépendent que des longueurs AB, AM, AD et BC. En éliminant MC, MD entre les deux relations, il vient

$$(2) \qquad MB.ND.\overline{AC}^2 + MA.NC.\overline{BD}^2 = k_4,$$

c'est-à-dire une relation de la forme (1). Les deux relations sont identiques si l'on a

$$(3) \qquad \frac{MB.ND}{\alpha} = \frac{MA.NC}{\beta} = \frac{k_4}{k},$$

ce qui peut être vérifié pour une infinité de choix du couple de points M et N. On vérifiera de même que deux points P et Q, appartenant respectivement à BC et à DA, sont liés si l'on a

$$(4) \qquad \frac{PB.QD}{\alpha} = \frac{PC.QA}{\beta}.$$

Le reste de l'énoncé s'établit très facilement au moyen des relations (3) et (4). J'en laisse le soin au lecteur.

2. On peut obtenir une combinaison assez remarquable d'hyperboloïdes articulés.

Soient A, B, C, D, A′, B′, C′, D′, huit points liés entre eux, comme l'indique la figure 1. La figure est celle d'un hexaèdre, à cela près que les faces telles que ABCD ne sont pas planes.

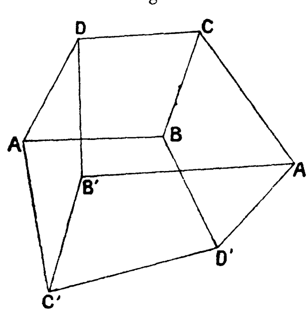
La figure étant constituée par 8 points assujettis à 12 conditions dépend de $3.8 - 12 = 12$ paramètres; 6 de ces paramètres sont des paramètres de position. La figure dépend donc de 6 paramètres de grandeur.

Il en résulte que si dans chacun des six quadrilatères tels que ABCD, on introduit une liaison entre deux points appartenant à deux côtés opposés, le système sera généralement rigide. Il y a donc intérêt à montrer l'existence d'un système agencé de cette manière et déformable.

Je procéderai à cet effet de la manière suivante :

Construisons la figure 1 de telle manière que les

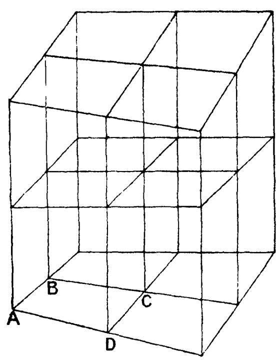
Fig. 1.



points A et A′, B et B′, C et C′, D et D′ soient deux à deux symétriques par rapport à une droite Δ. On peut se donner *a priori* les 4 points A, B, C, D et la droite Δ. Les quatre autres points sont alors déterminés. La figure dépend donc de $4 \times 3 + 4 = 16$ paramètres, dont 10 sont des paramètres de grandeur.

Cela posé, assujettissons six des arêtes, dont deux quelconques ne sont pas symétriques par rapport à Δ, à être de longueurs constantes d'ailleurs quelconques (on peut choisir, par exemple, les arêtes AB, AD,

Fig. 2.



AC', BD', C'B', C'D'). Les six autres arêtes, qui sont égales aux premières, chacune à chacune, sont aussi de longueurs constantes.

La figure dépend maintenant de $10 - 6 = 4$ paramètres de grandeur. Nous pouvons donc lui imposer encore trois conditions sans qu'elle cesse d'être déformable. Nous les choisissons ainsi qu'il suit : chacun des quadrilatères ABCD, ABD'C', ADB'C' devra se déformer de telle manière qu'il existe une relation linéaire entre les carrés de ses diagonales. S'il en est ainsi, chacun des quadrilatères A'B'C'D', A'B'DC, A'D'BC, qui sont égaux respectivement aux trois premiers, satisfait à une condition de même nature.

Si alors on se reporte au théorème qui a été établi au n° 1, on voit que *la figure* ABCDA'B'C'D' *peut se déformer de telle manière que, dans chaque quadrilatère tel que* ABCD, *un point quelconque d'un côté soit lié à un point convenablement choisi sur le côté opposé.* Nous avons, par conséquent, réalisé un assemblage de six hyperboloïdes articulés.

Un fait est intéressant à signaler : soit α un point de AB, β le point de CD qui est lié à α, γ le point de A'B' qui est lié à β, δ le point de C'D' qui est lié à γ; *le point* δ *est lié au point* α. On établit bien aisément ce résultat au moyen de la relation (3).

Note. — Dans une Note ancienne ([1]), M. J. Larmor étudie un système de 27 tiges articulées, constitué comme l'indique la figure 2, et conclut que ce système, construit d'une manière aussi générale que possible, est déformable avec *trois* degrés de liberté (comme c'est évidemment le cas lorsque les 27 tiges sont réparties en trois groupes de 9 tiges parallèles entre elles, la figure étant alors constituée par un assemblage de parallélépipèdes). S'il en était bien ainsi, les résultats contenus dans le n° 2 du travail précédent ne présenteraient aucun intérêt. Mais le raisonnement de M. Larmor repose sur un compte inexact des équations qui relient certaines variables, et ses conclusions ne sont pas légitimes ([2]).

([1]) *On possible systems of jointed wickerwork, and their degrees of internal freedom* (*Proceedings of the Cambridge philosophical Society*, t. V, 1884, p. 161).

([2]) L'auteur prend comme inconnues les 81 cosinus directeurs des 27 tiges du système, et cherche le nombre des équations indépen-

J'ai pensé (ainsi que M. Larmor, à qui j'avais communiqué l'observation qui précède) qu'il y avait lieu de signaler l'inexactitude d'un résultat qui paraît avoir été admis jusqu'ici sans discussion (1). On voit en effet se poser une question intéressante : *Est-il possible de construire un système articulé, du type de la figure* 2, *déformable avec au moins un degré de liberté?* En dehors, bien entendu, du cas où tous les quadrilatères de la figure sont des parallélogrammes, et du cas où le système est constitué par trois *systèmes binaires* égaux, reliés par des tiges égales et parallèles (M. Larmor appelle *système binaire* la figure formée par 6 génératrices d'un hyperboloïde déformable, 3 d'un système et 3 de l'autre).