Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 236-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__236_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2047.

(1906, p. 480.)

Soient C_1, C_2, C_3, C_4 *quatre cycles d'un même plan,* D_{ij} *et* D'_{ij} *les tangentes communes aux cycles* C_i *et* C_j.

Si les quatre semi-droites D_{12}, D_{23}, D_{34}, D_{41} *sont tangentes à un même cycle, il en est de même des quatre semi-droites* D'_{12}, D'_{23}, D'_{34}, D'_{41}. (R. B.)

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Les quatre semi-droites D_{12}, D_{23}, ... forment un contour quadrangulaire ABCD; soit M et N, P et Q, R et S, U et V les points de contact de ces semi-droites avec les cycles C_1 et C_2, C_2 et C_3, ... Les quatre semi-droites en question sont tangentes à un même cycle si l'on a

$$(1) \qquad \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DA} = 0,$$

ou

$$(\overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NB}) - (\overline{BP} + \overline{PQ} + \overline{QC}) + \ldots - \ldots = 0,$$

ce qui se réduit à

$$(2) \qquad \overline{MN} - \overline{PQ} + \overline{RS} - \overline{UV} = 0.$$

En employant les mêmes notations avec des accents pour les quatre autres tangentes communes, on a donc

$$(3) \qquad \overline{M'N'} - \overline{P'Q'} + \ldots = 0,$$

et, par suite,

$$(4) \qquad \overline{A'B'} - \overline{B'C'} + \ldots = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

2051.

(1906, p. 480.)

Les angles d'un quadrilatère gauche ont chacun deux bissectrices, l'une intérieure, l'autre extérieure. Quatre bissectrices issues de sommets différents sont sur un même hyperboloïde si le nombre des bissectrices intérieures est pair. (R. B.)

PREMIÈRE SOLUTION

Par M. PARROD.

Considérons les quatre bissectrices intérieures AA', BB', CC' et DD'; elles rencontrent les droites AC et BD joignant les sommets opposés. Il suffit de montrer que les points A, C, B′, D′ situés sur AC et B, D, A′, C′ situés sur BD appartiennent à deux divisions homographiques. En effet,

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{BA}{BC}, \qquad \frac{D'A}{D'C} = \frac{DA}{DC},$$

$$\frac{A'B}{A'D} = \frac{AB}{AD}, \qquad \frac{C'B}{C'D} = \frac{CB}{CD};$$

donc

$$\frac{B'A}{B'C} : \frac{D'A}{D'C} = \frac{A'B}{A'D} : \frac{C'B}{C'D}.$$

En prenant un nombre impair de bissectrices intérieures, ces deux rapports anharmoniques sont de signes contraires.

Solutions semblables de MM. Laureaux et Letierce.

DEUXIÈME SOLUTION

Par M. Thié.

Appliquons à chaque sommet du quadrilatère deux forces dirigées respectivement suivant les deux côtés qui aboutissent à ce sommet; supposons de plus que les intensités des huit forces ainsi introduites sont toutes égales, et que les forces appliquées à deux sommets consécutifs sont opposées. Le système de forces ainsi constitué est en équilibre. Les deux forces appliquées en un sommet ont leur résultante dirigée suivant l'une des bissectrices de l'angle correspondant du quadrilatère, et le nombre des bissectrices intérieures est pair, comme on le voit aisément. On en conclut que quatre bissectrices issues de sommets différents sont les lignes d'action de quatre forces en équilibre, si le nombre des bissectrices intérieures est pair. Donc, en vertu d'un théorème connu, ces bissectrices appartiennent à un même hyperboloïde.

2052.

(1906, p. 528.)

Soient a, b, c, d des fonctions d'une variable k; a priori *on peut mettre l'expression $\frac{az+b}{cz+d}$ sous la forme $\frac{m'z+n'}{mz+n}k$,* *l'accent indiquant une dérivée ; exprimer la fonction k au moyen des fonctions a, b, c, d et de leurs dérivées.*

Application aux deux formes de l'intégrale d'une équation de Riccati :

$$y = \frac{Ca + b}{Cc + d}, \qquad y = \frac{1}{X}\,\frac{C_1 p' + q'}{C_1 p + q}.$$

(*Voir* une Note de M. Raffy, *Nouvelles Annales*, 1902, p. 529). (G. F.).

SOLUTION

Par M. A. Lambert.

1. Les trois fonctions m, n, k doivent satisfaire aux conditions

$$\frac{m'}{n'} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{m}{n} = \frac{c}{d}, \qquad k = \frac{b}{d} : \frac{n'}{n} = \frac{bn}{dn'}.$$

En égalant les valeurs de m' fournies par les deux premières égalités, on obtient

$$dn'(ad - bc) = bn(c'd - d'c);$$

on en conclut

$$k = \frac{ad - bc}{c'd - d'c}. \tag{1}$$

Pour $a = c'$, $b = d'$, on aurait naturellement $k = 1$.

Connaissant k, on aura m et n par les relations

$$k\frac{m'}{m} = \frac{a}{c}, \qquad k\frac{n'}{n} = \frac{b}{d};$$

toutefois, chacune des fonctions m et n ne se trouve ainsi déterminée qu'à un facteur constant près, et l'un de ces facteurs constants doit être choisi d'après l'autre, de manière à satisfaire à la relation $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$.

2. Considérons l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1 y + X_2 = 0.$$

Si l'on rattache cette équation à l'équation linéaire du premier ordre, on trouve pour y une fonction de la forme

$$(2) \qquad y = \frac{Ca + b}{Cc + d},$$

C étant une constante, a, b, c, d étant des fonctions de x, et, réciproquement, toute fonction de cette forme satisfait à une équation de Riccati. Si l'on rattache cette équation à l'équation linéaire du second ordre, on trouve

$$y = \frac{1}{X} \frac{C_1 p' + q'}{C_1 p + q}.$$

Les valeurs correspondantes des constantes C et C_1 étant liées homographiquement, on peut remplacer C_1 par $\frac{C\alpha + \beta}{C\gamma + \delta}$, α, β, γ, δ étant des constantes, et l'on obtient

$$(3) \qquad y = \frac{1}{X} \frac{Cm' + n'}{Cm + n},$$

la constante C étant la même que dans (2). On a alors, d'après ce que l'on a vu au début,

$$(4) \qquad X = \frac{c'd - d'c}{ad - bc}.$$