Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 188-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__188_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1898.

(1900, p 575)

Soient ABCD *un quadrilatère;* A′, B′, C′, D′ *les centres des cercles inscrits aux triangles* BCD, CDA, DAB, ABC *respectivement;* α, β, γ, δ *les périmètres de ces triangles. Démontrer que le centre de gravité des poids* α, β, γ, δ *placés en* A, B, C, D *est le même que celui des mêmes poids placés en* A′, B′, C′, D′ *respectivement.*

C.-A. LAISANT.

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Représentons par $(x'\,y')$ les coordonnées de A, $(x''\,y'')$ celles de B et c; par a, b, c, d, m et n les longueurs AB, BC, CD, DA, BD et AC.

Le centre de gravité des 4 sommets chargés des poids α, β, γ, δ aura pour abscisse

$$x = \frac{\alpha x' + \beta x'' + \gamma x''' + \delta x^{\text{IV}}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

et de même pour y.

L'abscisse de A′ est, d'après une formule connue,

$$x = \frac{c x'' + m x''' + b x^{\text{IV}}}{b + c + m} = \frac{c x' + m x''' + b x^{\text{IV}}}{\alpha}.$$

Le centre de gravité des 4 points A′, B′, C′, D′ chargés des poids α, β, γ, δ aura donc pour abscisse

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sum \frac{c x'' + m x''' + b x^{\text{IV}}}{\alpha}\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \\ &= \frac{x'(m + c + b) + x''(c + d + n) + x'''(a + d + m) + x^{\text{IV}}(a + b + n)}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \\ &= \frac{\alpha x' + \beta x'' + \gamma x''' + \delta x^{\text{IV}}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \end{aligned}$$

qui est bien la valeur trouvée plus haut.

Note. — On sait que A′ est le centre de gravité des poids (CD), (DB), (BC), placés en B, C, D respectivement. En répétant la même observation sur B′, C′, D′, on voit qu'on obtiendra le centre de gravité de ces quatre points affectés de poids égaux aux périmètres des triangles correspondants, en plaçant en A les trois poids (BC), (CD), (DB), et de même pour B, C, D, ce qui démontre la proposition.

Celle-ci s'étend à un système de 5 points dans l'espace, A, B, C, D, E, en considérant les centres A′, ... des sphères inscrites aux tétraèdres BCDE, ... et en remplaçant les périmètres des triangles de l'énoncé par les aires extérieures des tétraèdres considérés. C.-A. L.

2028.

(1905, p. 575.)

Dans un cercle de centre O *et de rayon* R, *soient* AB, BC, CD *trois côtés consécutifs du polygone régulier inscrit de* 14 *côtés. On projette* D *sur* OA, OB, OC, *respectivement en* E, F, G. *Démontrer la relation*

$$\mathrm{DE} + \mathrm{DF} - \mathrm{DG} = \frac{\mathrm{R}\sqrt{7}}{2}.$$

(E.-N. Barisien.)

PREMIÈRE SOLUTION
Par M. Letierce.

Une circonférence de rayon 1 étant partagée en sept parties égales, et u_1, u_2, u_3 désignant les côtés des polygones obtenus en joignant les points de division de 1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3, on voit que la relation proposée revient à la suivante :

$$u_2 + u_3 - u_1 = \sqrt{7}. \tag{1}$$

Or (*voir* Trigonométrie, Polygones réguliers), u_1^2, u_2^2, u_3^2 sont racines de l'équation en u

$$u^3 - 7u^2 + 14u - 7 = 0,$$

donc

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 7,$$

et, par suite,

$$(u_2 + u_3 - u_1)^2 = 7 + 2(u_2 u_3 - u_1 u_2 - u_1 u_3).$$

Le théorème de Ptolémée, appliqué au quadrilatère inscrit de côtés successifs u_1, u_1, u_2, u_3, montre que l'expression entre parenthèses dans le second membre est nulle; donc la relation (1) est démontrée.

SECONDE SOLUTION

Par M. Plakhowo.

On a

$$\begin{aligned}
DE + DF - DG &= R\left(\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right)\\
&= R\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\right)\\
&= R\left(\sin\frac{1.2\pi}{7} + \sin\frac{2.2\pi}{7} + \sin\frac{4.2\pi}{7}\right).
\end{aligned}$$

Les nombres 1, 2, 4 sont les résidus quadratiques de 7. Or, lorsque p est un nombre premier de la forme $4n+3$, on a

$$1 + 2\sum e^{\alpha\frac{2\pi i}{7}} = i\sqrt{p}.$$

La somme Σ s'étendant à tous les nombres α qui sont résidus quadratiques de p. (Le premier membre est ce qu'on appelle une *somme de Gauss.*)

On tire de là

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin 2\frac{2\pi}{7} + \sin 4\frac{2\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

ce qui donne la formule à démontrer.

Autre solution par M. Droz-Farny.

2030.

(1905, p. 576.)

L'antipodaire d'une ellipse par rapport à un des sommets du grand axe est une quartique; l'antipodaire de la même ellipse par rapport à un des sommets du petit axe *est une autre quartique. Montrer que ces deux quartiques ont même aire, équivalente aux $\frac{4}{3}$ de l'aire de la développée de l'ellipse.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation de l'ellipse, $M(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ un point de cette courbe et A le sommet situé sur les x positifs.

L'antipodaire par rapport à A est l'enveloppe de la perpendiculaire MN élevée en M à la droite AM, enveloppe définie par

$$\begin{aligned}
&(\text{éq. de MN}) \quad by\sin\varphi-a(a-x)(1-\cos\varphi)+c^2\sin^2\varphi=0,\\
&(\text{éq. dérivée}) \quad by\cos\varphi-a(a+x)\sin\varphi+2c^2\sin\varphi\cos\varphi=0,
\end{aligned}$$

d'où

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{a(a+x)}{c^2} &= \cos\varphi(1+\cos\varphi),\\
\frac{by}{c^2} &= -\sin\varphi(1-\cos\varphi).
\end{aligned}\right.$$

L'antipodaire cherchée est donc une courbe unicursale du quatrième degré.

L'aire est donnée par

$$\begin{aligned}
S &= \frac{2c^4}{ab}\int_0^\pi \sin^2\varphi(1-\cos\varphi)(1+2\cos\varphi)\,d\varphi\\
&= \frac{2c^4}{ab}\int_0^\pi (2\sin^4\varphi-\sin^2\varphi)\,d\varphi+\frac{2c^4}{ab}\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi.
\end{aligned}$$

La première intégrale est égale à $\frac{\pi}{4}$, la seconde est nulle; donc

$$S=\frac{\pi}{2}\,\frac{c^4}{ab}.$$

Or l'aire S′ de la développée est égale à $\frac{3\pi}{8}\frac{c^4}{ab}$; par suite,

$$S = \frac{4}{3} S'.$$

L'antipodaire, par rapport au sommet du petit axe situé sur les y positifs, s'obtient en remplaçant dans les expressions (1) a par b, x par y, φ par $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ et inversement; l'aire est donnée par

$$\frac{2c^4}{ab}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi(1 - \sin\varphi)(1 + 2\sin\varphi)\,d\varphi$$

qui est égale à S.